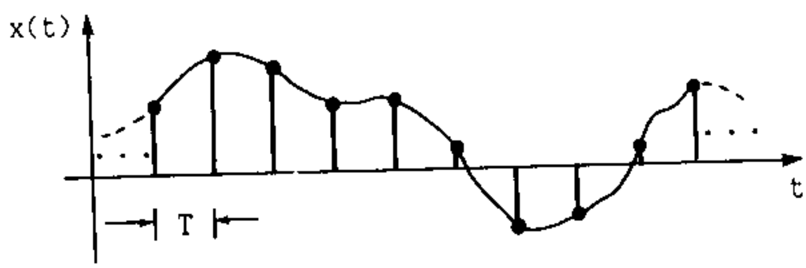
1. דגימת אותות בזמן רציף

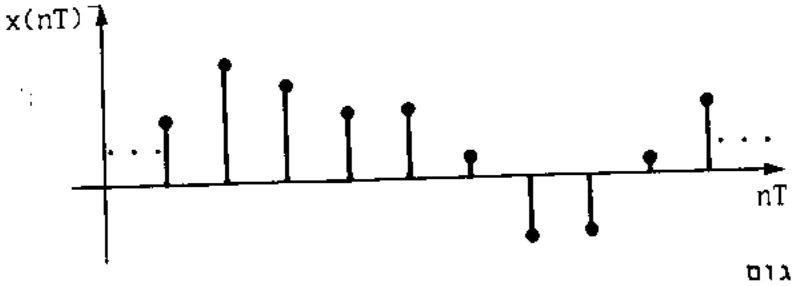
1.1 מבוא

האותות הנפוצים בטבע ובשימושים פיזיקליים והנדסיים שונים הם אותות בזמן רציף. בחלק א' של הקורס דנו ביתרונות העיבוד הספרתי ולא נחזור על כך כאן. השלב הראשון בעיבוד אותות ספרתי הוא המרת האותות הפיזיקליים מזמן רציף לזמן בדיד. הדרך המקובלת להמרת אותות בזמן רציף לאותות בזמן בדיד היא **דגימה**. כזכור מחלק א', פעולת הדגימה מתבטאת ב"לקיחת" ערכי האות $x(t)$ בזמנים שהם כפולות שלמות של יחידת זמן בסיסית T, הנקראת **מרווח הדגימה**. האות בזמן בדיד המתקבל כתוצאה מפעולה זו הוא $x(nT)$, כאשר n מקבל ערכים שלמים בלבד. איור 1-1 ממחיש פעולה זו.

דגימה
sampling



א. אות רציף



ב. אות דגום

איור 1-1 פעולת הדגימה

התבוננות באיור 1-1 מעלה מספר שאלות חשובות:

א. האם פעולת הדגימה אינה גורמת לאיבוד של מידע הנמצא באות המקורי?

ב. אם פעולת הדגימה אכן גורמת לאיבוד מידע, איך ניתן לצמצם ככל האפשר תופעה לא רצויה זו?

ג. האם קיימים אותות שעבורם הדגימה אינה גורמת כלל לאיבוד מידע?

ד. כיצד משפיעה בחירת מרווח הדגימה T על תכונות האות הדגום?

ה. האם אפשר לדגום אות נתון בכל דיוק רצוי, ואיזה ציוד דרוש לכך? אילו תכונות נדרשות מהתומרה המבצעת את הדגימה, ומה הן ההשפעות האפשריות על האות הדגום?

ו. האם ניתן לשחזר באופן מדויק את האות בזמן הרציף מתוך האות הדגום? אם שחזור מדויק אינו אפשרי, כיצד ניתן לבצע שחזור מקורב, ומה יהיו תכונותיו של שחזור כזה?

בפרק זה, וכן בפרקים הבאים, נענה לשאלות אלו. תחילה נעסוק **בדגימה אידאלית**, ללא שגיאות הנובעות ממגבלות תומרה. לאחר שנבין היטב את התופעות הנגרמות על-ידי דגימה אידאלית, נדון בבעיות הקשורות לדגימה מעשית ובהשלכותיהן.

דגימה אידאלית

בחלק א' התעלמנו מיחידת הזמן T וסימנו את כל האותות בזמן בדיד בסימונים כגון x(n), y(n) וכו'. עתה נחזור לסימונים המדויקים יותר x(nT), y(nT) וכו'. יחידת הזמן T נמדדת בשניות, למשל 0.1 s, 0.01 s. חשיבות החזרה לסימון המדויק תובהר בהמשך הפרק.

1.2 דגימת אותות סינוסואידליים

בחלק א' למדנו להכיר את חשיבותם של האותות הסינוסואידליים (ובהכללה - אותות אקספוננציאליים מרוכבים) להבנת מערכות ולניתוח תכונותיהן. לא ייפלא על כן שאנו פותחים את הצגת פעולת הדגימה בהמחשתה על אותות סינוסואידליים.

נניח שנתון אות סינוסואידלי בזמן רציף:

$$(1\text{-}1)\quad x(t) = a\,\sin(2\pi F_0 t + \phi_0) = a\,\sin(\Omega_0 t + \phi_0)$$

a הוא התנופה של האות, ו-F_0 הוא תדירותו ב-Hz. Ω_0 הוא **התדירות הזוויתית**, ב-rad/s, הקשורה ל-F_0 על-ידי:

תדירות זוויתית
angular frequency

$$\Omega_0 = 2\pi F_0$$

ϕ_0 הוא זווית המופע של האות, הנמדדת ברדיאנים.

נניח שאנו דוגמים את האות במרווח דגימה T, ומתקבל האות בזמן בדיד:

$$(1\text{-}2)\quad x(nT) = a\,\sin(2\pi F_0 nT + \phi_0) = a\,\sin(\Omega_0 nT + \phi_0)$$

להזכירך, נוסחה (1-4) שבחלק א' לאות סינוסואידאלי בזמן בדיד היא:
$s(n)=a\,\sin(2\pi f_0 n+\phi_0)$

השוואת נוסחה (1-2) עם נוסחה (1-4) שבחלק א' מצביעה על כך שהאות הדגום הוא אות סינוסואידלי בזמן בדיד, אשר:

א. התנופה שלו שווה לתנופת האות הנתון בזמן רציף.
ב. זווית המופע שלו שווה לזווית המופע של האות הנתון בזמן רציף.
ג. תדירותו f_0 קשורה לתדירות האות המקורי F_0 על-ידי:

$$(1\text{-}3)\quad f_0 = F_0 T$$

וכן גם:

$$(1\text{-}4)\quad \omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi F_0 T = \Omega_0 T$$

קשר זה שבין התדירויות "הרציפות" Ω_0, F_0 לבין התדירויות "הבדידות" ω_0, f_0 ילווה אותנו לאורך כל הפרק.
שים לב ליחידות הפיזיקליות השונות של גדלים אלה:
F_0 נמדד ב-Hz ו-T נמדד ב-s. המכפלה F_0T (כלומר f_0) היא מספר טהור. בדומה לכך, Ω_0 נמדד ב-rad/s ו-T נמדד ב-s. המכפלה Ω_0T (כלומר ω_0) נמדדת ב-rad.

שאלה 1 - 1

אות סינוסואידלי בתדירות F_0 = 150 Hz נדגם במרווח T = 0.001 s.
מהי תדירות האות הדגום ובאלה יחידות היא נמדדת? מהי התדירות הזוויתית של האות הדגום ובאלה יחידות היא נמדדת?

עתה אנו מגיעים לתיאור התופעה החשובה ביותר הכרוכה בפעולת הדגימה. נניח שאנו משנים את תדירות האות הסינוסואידלי הנתון ובמקום F_0 בוחרים בתדירות:

$$F_k = F_0 + \frac{k}{T} \qquad (1\text{-}5)$$

כאשר k הוא מספר טבעי כלשהו $(k = 1,2,3,\ldots)$. האות המקורי הוא עתה:

$$x_k(t) = a\,\sin\left[2\pi\left(F_0 + \frac{k}{T}\right)t + \phi_0\right] \qquad (1\text{-}6)$$

האות הדגום הוא:

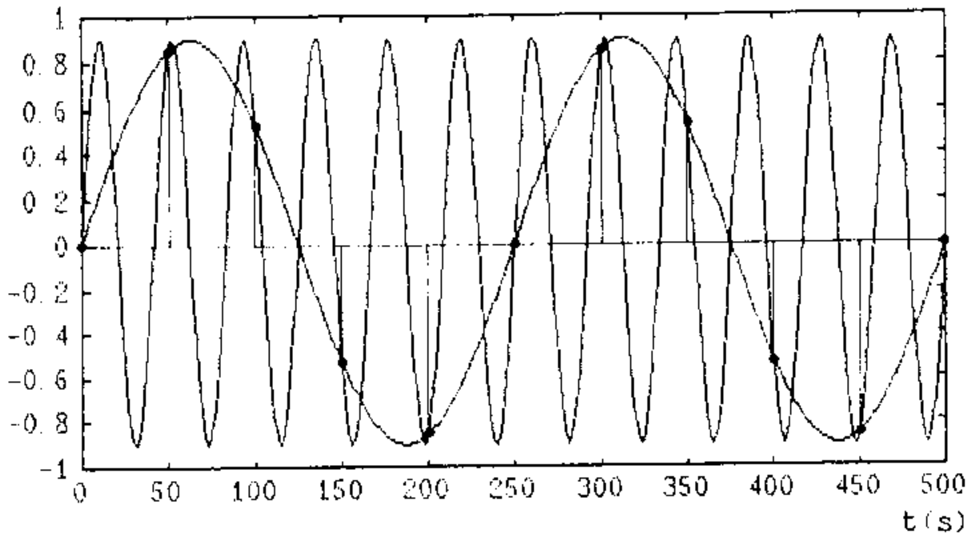
$$\begin{aligned} x_k(nT) &= a\,\sin\left[2\pi\left(F_0 + \frac{k}{T}\right)nT + \phi_0\right] \\ &= a\,\sin(2\pi F_0 nT + 2\pi kn + \phi_0) \\ &= a\,\sin(2\pi F_0 nT + \phi_0) = a\,\sin(2\pi f_0 n + \phi_0) \\ &= x(nT) \end{aligned} \qquad (1\text{-}7)$$

בגלל מחזוריות הפונקציה **sin** ניתן להשמיט כפולות שלמות של 2π.

כלומר: **אין כל הבדל בין האות הדגום $x_k(nT)$ לבין האות המתקבל על-ידי דגימת האות הסינוסואידלי בתדירות F_0!**

ניתן לנסח את התוצאה שקיבלנו גם במלים הבאות: דגימת כל האותות הסינוסואידליים בעלי תדירויות $F_0 + \frac{k}{T}$ (כאשר k הוא מספר טבעי כלשהו) מביאה בדיוק לאותה תוצאה.
אם נתבונן באות הדגום, לא נוכל לדעת מה היה האות הסינוסואידלי המקורי שממנו התקבל כי כל התדירויות $F_0 + \frac{k}{T}$ הן תשובות נכונות לשאלה זו.

איור 1-2 ממחיש תופעה זו. באיור זה נראים שני אותות סינוסואידליים בתדירויות שונות, ודגימה שלהם. כפי שרואים, שני האותות מתלכדים ברגעי הדגימה ועל כן האות הדגום זהה עבור שניהם.



איור 1-2 דגימת שני אותות סינוסואידליים

באופן מעשי נהוג להתמודד עם בעיה זו על-ידי קביעת מרווח הדגימה T כך שיתקיים התנאי

$$F_0 T < \frac{1}{2} \qquad (1\text{-}8)$$

בחירה זו מבטיחה כי תדירות האות הסינוסואידלי הדגום f_0 תקיים:

$$f_0 < \frac{1}{2} \qquad (1\text{-}9)$$

נוכל למצוא את תדירות האות המקורי מתוך תדירות האות הדגום על-ידי:

$$F_0 = \frac{f_0}{T} \qquad (1\text{-}10)$$

כפי שנראה בהמשך הפרק, התופעה שהצגנו בסעיף זה אינה מיוחדת דוקא לאותות סינוסואידליים, אלא לאותות דגומים בכלל.

שאלה 2 - 1

נתון האות:

$$x(t) = 2\sin(2\pi\times 40t + 0.8)$$

א. מהו מרווח הדגימה שיבטיח כי ניתן יהיה לזהות את תדירות האות מתוך תדירות האות הדגום באופן חד-משמעי?

ב. אם מרווח הדגימה הוא $T = 0.01$, מהי תדירות האות הדגום?

ג. אם מרווח הדגימה הוא $T = 0.1$, מהו האות הדגום? האם ניתן לזהות ממנו באופן חד-משמעי את תדירות האות המקורי?

שאלה 3 - 1

נתון האות:

$$x(t) = 3\ \mathbf{sin}(2\pi\times 40t + 0.8) + 2\ \mathbf{sin}(2\pi\times 75t - 0.3)$$

כיצד יש לבחור את מרווח הדגימה T, כך שניתן יהיה לזהות באופן חד-משמעי את תדירויות רכיבי האות המקורי מידיעת רכיבי האות הדגום?

שאלה 4 - 1

נתון אות שהוא סכום של M אותות סינוסואידליים:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{M} a_k \mathbf{sin}(2\pi F_k t + \phi_k)$$

כיצד יש לבחור את מרווח הדגימה T כך שניתן יהיה לזהות באופן חד-משמעי את תדירויות רכיבי האות המקורי מידיעת תדירויות רכיבי האות הדגום?

1.3 התמרת פורייה של אותות בזמן רציף

סעיף זה מוקדש לחזרה קצרה על התמרות פורייה של אותות בזמן רציף - כלי שנזדקק לו בהמשך פרק זה.

נניח כי נתון אות $x(t)$ שהוא **בעל אינטגרל סופי**, כלומר:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty \qquad (1\text{-}11)$$

לאות כזה יש **התמרת פורייה** $X_\phi(\Omega)$ המוגדרת על-ידי:

$$X_\phi(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt \qquad (1\text{-}12)$$

אנו משתמשים באות היוונית ϕ (מבוטאת כ-"פִי") כדי להבחין בין התמרה זו לבין התמרת פורייה של אותות בזמן בדיד אותה סימנו, כזכור, באות F. Ω נקראת **תדירות זוויתית** ונמדדת ביחידות rad/s. היא מקבלת ערך כלשהו בתחום $-\infty < \Omega < \infty$. $X_\phi(\Omega)$ הוא פונקציה מרוכבת שיש לה ערך מוחלט $|X_\phi(\Omega)|$ וזווית ארגומנט $\arg X_\phi(\Omega)$. התמרת פורייה של $x(t)$ נקראת גם **הספקטרום** של $x(t)$.

האות $x(t)$ ניתן לביטוי בעזרת התמרת פורייה שלו על-ידי שימוש בנוסחת **התמרת פורייה ההפוכה**:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_\phi(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega \qquad (1\text{-}13)$$

דוגמה 1 - 1

נניח כי האות $x(t)$ הוא:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad t < 0 \\ e^{-\alpha t} & ; \quad t \geq 0 \end{cases} \quad ; \ \alpha > 0 \qquad (1\text{-}14)$$

(אות כזה נקרא **אות אקספוננציאלי**). התמרת פורייה של אות זה היא:

$$X_\phi(\Omega) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\ e^{-j\Omega t}dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+j\Omega)t}dt \qquad (1\text{-}15)$$

$$= -\frac{1}{\alpha+j\Omega}\cdot e^{-(\alpha+j\Omega)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha+j\Omega}$$

הערך המוחלט של ההתמרה הוא:

$$|X_\phi(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\Omega^2}} \qquad (1\text{-}16)$$

וזווית הארגומנט היא:

$$\arg X_\phi(\Omega) = -\mathrm{arctg}\,\frac{\Omega}{\alpha} \qquad (1\text{-}17)$$

שאלה 5 - 1

נתון האות הבא:

$$x(t) = \begin{cases} 1; & 0 \le t \le T \\ 0; & \text{אחרת} \end{cases}$$

חשב את התמרת פורייה של אות זה.

1.4 דגימת אותות כלליים בזמן רציף

נניח כי נתון אות בזמן רציף $x(t)$, בעל אינטגרל סופי, ו-$X_\phi(\Omega)$ הוא התמרת פורייה שלו. נדגום את האות במרווח T ונקבל את האות בזמן בדיד $x(nT)$. התמרת פורייה של האות בזמן בדיד היא כזכור:

$$(1\text{-}18) \quad X_F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-jn\omega}$$

נשאלת השאלה האם יש קשר כלשהו בין $X_F(\omega)$ לבין התמרת פורייה של האות הנתון $X_\phi(\Omega)$. מסתבר כי קשר כזה אכן קיים, והוא נתון על-ידי הנוסחה הבאה:

$$(1\text{-}19) \quad \boxed{X_F(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_\phi\left(\frac{\omega+2\pi k}{T}\right)}$$

משמעות הביטוי $X_\phi\left(\frac{\omega+2\pi k}{T}\right)$ באגף ימין היא, שמחליפים את המשתנה Ω במשתנה $\frac{\omega+2\pi k}{T}$.

נוסחה זו היא חשובה ביותר, ובהמשך הפרק נדון במשמעותה הפיזיקלית. הוכחת הנוסחה קשה במקצת, ודורשת ידע מסוים באינטגרלים. ההוכחה ניתנת כחומר רשות בנספח א' שבסוף הספר.

נמחיש את השימוש בנוסחה (1-19) על-ידי דוגמה.

דוגמה 2 - 1

ראינו בדוגמה 1-1 כי התמרת פורייה של האות האקספוננציאלי

$$x(t) = \begin{cases} 0 & ; t < 0 \\ e^{-\alpha t}; & t \geq 0 \end{cases} \quad ; \alpha > 0$$

היא:

$$X_{\phi}(\Omega) = \frac{1}{\alpha + j\Omega}$$

כאשר דוגמים אות אקספוננציאלי במרווח T מתקבל האות הגיאומטרי

$$x(nT) = \begin{cases} 0 & ; n < 0 \\ e^{-\alpha nT}; & n \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & ; n < 0 \\ \lambda^n; & n \geq 0 \end{cases} \quad ; |\lambda|<1$$

כאשר $\lambda = e^{-\alpha T}$. ידוע מפרק 6 בחלק א' כי התמרת פורייה של $x(nT)$ היא:

$$X_F(\omega) = \frac{1}{1 - \lambda e^{-j\omega}}$$

נובע מכאן, על-ידי שימוש בנוסחה (1-19), כי:

$$\frac{1}{1 - e^{-\alpha T} e^{-j\omega}} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha + j\,\frac{\omega + 2\pi k}{T}}$$

או:

$$\frac{1}{1 - e^{-(\alpha T + j\omega)}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha T + j\omega + j2\pi k}$$

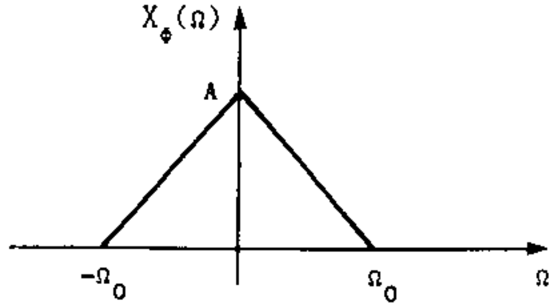
1.5 דגימת אותות מוגבלי פס

נפתח את הדיון במשמעויותיה של נוסחה (1-19) במקרה פשוט יחסית.

אות מוגבל פס
band limited signal

אות בזמן רציף נקרא **אות מוגבל פס** אם התמרת פורייה שלו קיימת רק בתחום תדירויות מסוים, נניח בין $-\Omega_0 \leq \Omega \leq \Omega_0$, ומתאפסת מחוץ לתחום זה. איור 1-3 ממחיש תכונה זו.

באיור זה הנחנו לשם פשטות כי $X_{\phi}(\Omega)$ הוא ממשי, כדי להימנע מהצורך לשרטט את תגובות התנופה והמופע בנפרד.



איור 1-3 התמרת פורייה של אות מוגבל פס בתחום $|\Omega| \le \Omega_0$

שאלה 6 - 1

האם כל אחד מהאותות הבאים הוא מוגבל פס?

א. אות אקספוננציאלי.

ב. האות הנתון בשאלה 1-5.

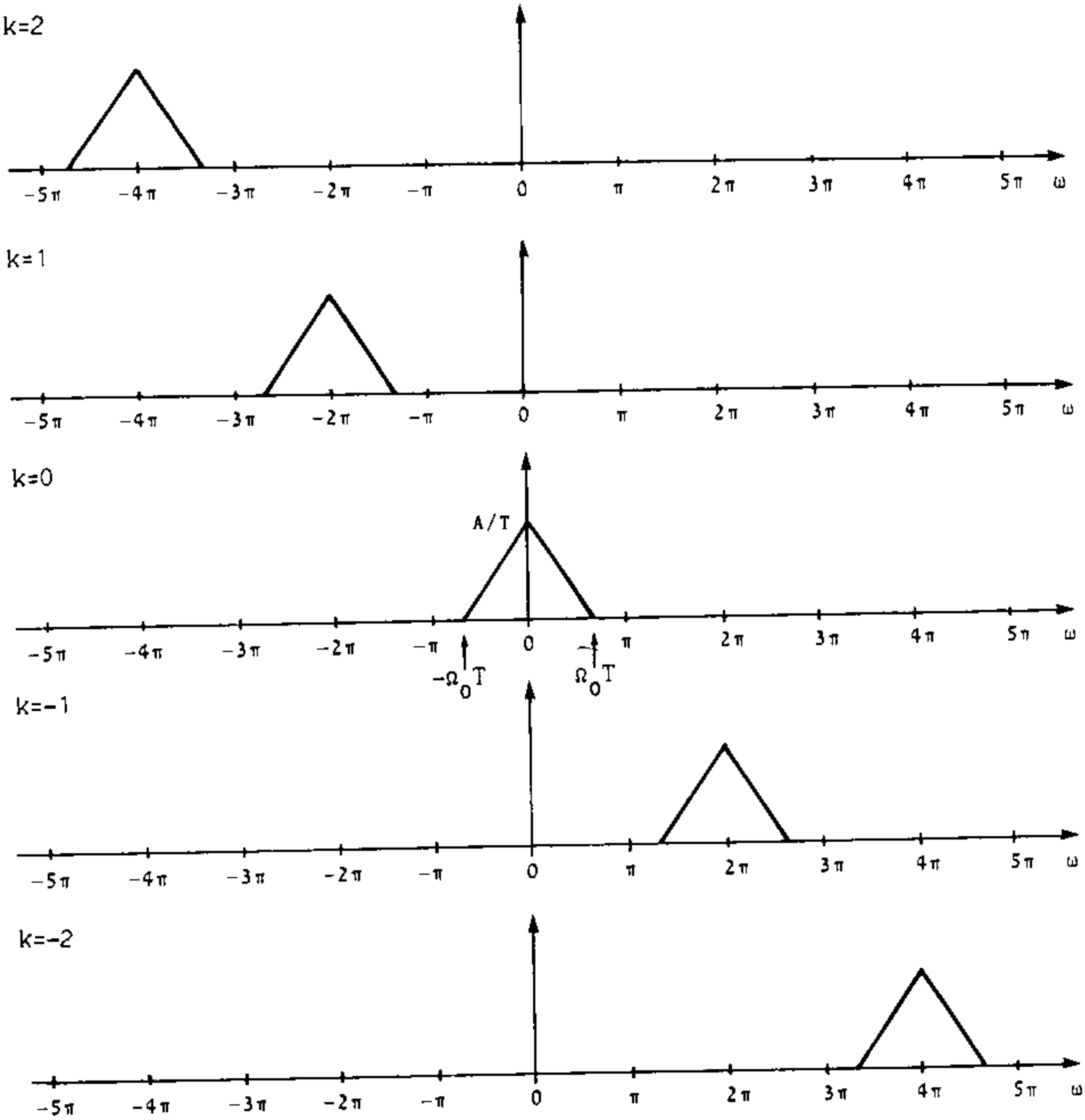
נניח כי האות הרציף נדגם במרווח דגימה T, הנבחר כך שיקיים:

$$T < \frac{\pi}{\Omega_0} \;\;\Rightarrow\;\; \Omega_0 T < \pi \qquad (1\text{-}20)$$

ננסה לשרטט את התמרת פורייה של האות הדגום $X_F(\omega)$ תוך שימוש בנוסחה (1-19). לשם כך עלינו לשרטט בנפרד את הפונקציות $\frac{1}{T}\cdot X_\phi\left(\frac{\omega+2\pi k}{T}\right)$ עבור כל ערכי k בין $-\infty < k < \infty$, ולאחר מכן לסכם את כל האיברים.

המשמעות הגלומה בנוסחה $\frac{1}{T}\cdot X_\phi\left(\frac{\omega+2\pi k}{T}\right)$ ניתנת לביטוי כדלקמן: קח את הפונקציה $X_\phi(\Omega)$, ושנה את קנה המידה של ציר התדירות מ-Ω ל-$\omega=\Omega T$. לאחר מכן, הזז את הפונקציה בשיעור $2\pi k$ על-פי ערכו של k (הזזה שמאלה אם k חיובי, והזזה ימינה אם k שלילי). לבסוף כפול את ערך הפונקציה בכל נקודה ב- $\frac{1}{T}$.

איור 1-4 ממחיש פעולות אלו עבור $k = -2,-1,0,1,2$.
ההכללה ל-k כלשהו ברורה.

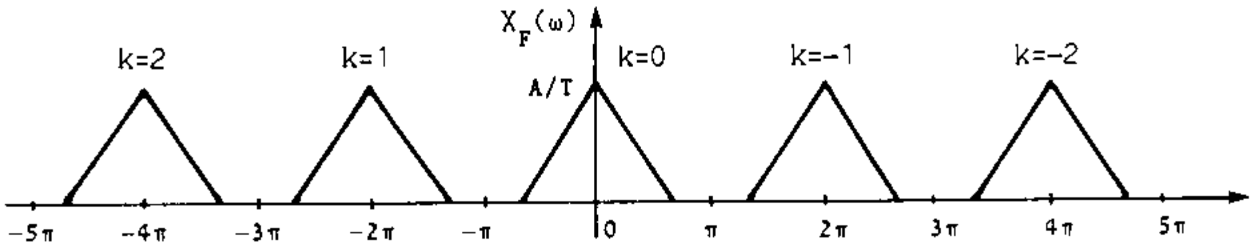


איור 1-4 תיאור הפונקציות $\frac{1}{T}\cdot X_\phi\left(\frac{\omega+2\pi k}{T}\right)$ עבור אות מוגבל פס

שים לב שבאיור 1-4 הדגשנו, עבור המקרה k=0 את התנופה המירבית $\frac{A}{T}$ ואת תדירויות הקצה $-\Omega_0T$ ו-Ω_0T. בגלל המגבלה (1-20) שהטלנו על מרווח הדגימה, ההתמרה עבור k=0 היא בתוך התחום $-\pi < \omega < \pi$.

בדומה לכך, ההתמרה עבור k כלשהו היא בתוך התחום $-(2k+1)\pi < \omega < -(2k-1)\pi$. נובע מכאן כי במקרה זה **אין תפיפה** בין הפונקציות השונות $\frac{1}{T}\cdot X_\phi(\frac{\omega+2\pi k}{T})$.

סיכום הפונקציות המתאימות לערכי k השונים יתן את התמונה הנראית באיור 1-5.



איור 1-5 התמרת פורייה של אות מוגבל פס בתחום $|\Omega| \le \Omega_0$, דגום במרווח $T < \frac{\pi}{\Omega_0}$

הרחבה מחזורית
periodic extension

התמונה באיור 1-5 נקראת **הרחבה מחזורית** של התמונה באיור 1-3. ניתן אפוא לסכם ולומר כי התמרת פורייה של האות הדגום מתקבלת מהתמרת פורייה של האות המקורי על-ידי שלוש הפעולות הבאות:

א. שינוי קנה המידה של ציר התדירות לפי הקשר $\omega = \Omega T$.

ב. שינוי קנה המידה של ציר התנופה בשיעור $\frac{1}{T}$.

ג. הרחבה מחזורית של ההתמרה המקורית (לאחר שינוי קני המידה) במחזוריות של 2π.

נדון עתה ביתר הרחבה במשמעות המגבלה $\Omega_0 T < \pi$. כפי שרואים באיור 1-5, גורמת מגבלה זו לכך שלא תהיה חפיפה בין החזרות השונות של הפונקציה $X_\phi(\Omega)$. כל חזרה כזו שומרת על הצורה המקורית, פרט לשינוי קני המידה של התדירות והתנופה. במיוחד, צורת הספקטרום בתחום $-\pi < \omega < \pi$ זהה לצורת הספקטרום של האות המקורי. את המגבלה $\Omega_0 T < \pi$ ניתן לכתוב גם בצורות הבאות:

$$(1\text{-}20) \quad T < \frac{1}{2F_0} \; ; \quad \frac{1}{T} > \frac{\Omega_0}{\pi} \; ; \quad \frac{1}{T} > 2F_0$$

רוחב פס
bandwidth

כאשר $F_0 = \frac{\Omega_0}{2\pi}$ הוא **רוחב הפס** של האות, הנמדד בהרץ.

קצב דגימה
sampling rate

הגודל $\frac{1}{T}$ נקרא **קצב הדגימה**, ואף הוא נמדד בהרץ.

ניתן אפוא לבטא את התוצאה שקיבלנו באופן הבא:

> כדי שלא תהיה חפיפה בין החזרות השונות בהתמרת פורייה של האות הדגום, יש לבחור קצב דגימה שיהיה גדול פי 2 מרוחב הפס של האות.

קצב קריטי
critical rate

קצב נייקויסט
Nyquist rate

התדירות $2F_0$ נקראת גם **הקצב הקריטי** או **קצב נייקויסט**, על שם האיש שגילה תופעה זו לראשונה. הקצב הקריטי הוא קצב הדגימה המינימלי בו מותר לדגום אות מוגבל פס כך שלא תהיה חפיפה בין החזרות בהתמרת פורייה של האות הדגום.

הקורא חד-העין שם לב ודאי לדמיון בין התוצאה שקיבלנו בסעיף זה לבין התוצאה שהתקבלה בסעיף 1.2 עבור אותות סינוסואידליים. גם את המגבלה (1-8) ניתן לבטא בצורה $\frac{1}{T} > 2F_0$ שהיא זהה ל-(1-20). דמיון זה אינו מפתיע - אות סינוסואידלי הינו אות מוגבל פס מסוג מיוחד, שהספקטרום שלו קיים בתדירות בודדת, היא תדירות האות הסינוסואידלי. לכן יש לדגום אות סינוסואידלי בקצב שהוא גדול מהקצב הקריטי כדי לאפשר הבחנה בין תדירות האות המקורי לבין תדירות האות הדגום.

שאלה 7 - 1

נתון כי התמרת פורייה של אות מסוים $x(t)$ היא:

$$X_\phi(\Omega) = \begin{cases} 1; & -\Omega_0 \le \Omega \le \Omega_0 \\ 0; & \text{אחרת} \end{cases}$$

א. האם אות זה הוא מוגבל פס?

ב. היעזר בהתמרת פורייה ההפוכה כדי לחשב את האות עצמו.

<u>הערה</u>: פתרון סעיף זה דורש ידע מסוים באינטגרלים.

שאלה 8 - 1

האות הנתון בשאלה 1-7 נדגם במרווח $T = \frac{\pi}{2\Omega_0}$.

א. האם קצב הדגימה גדול או קטן מהקצב הקריטי?

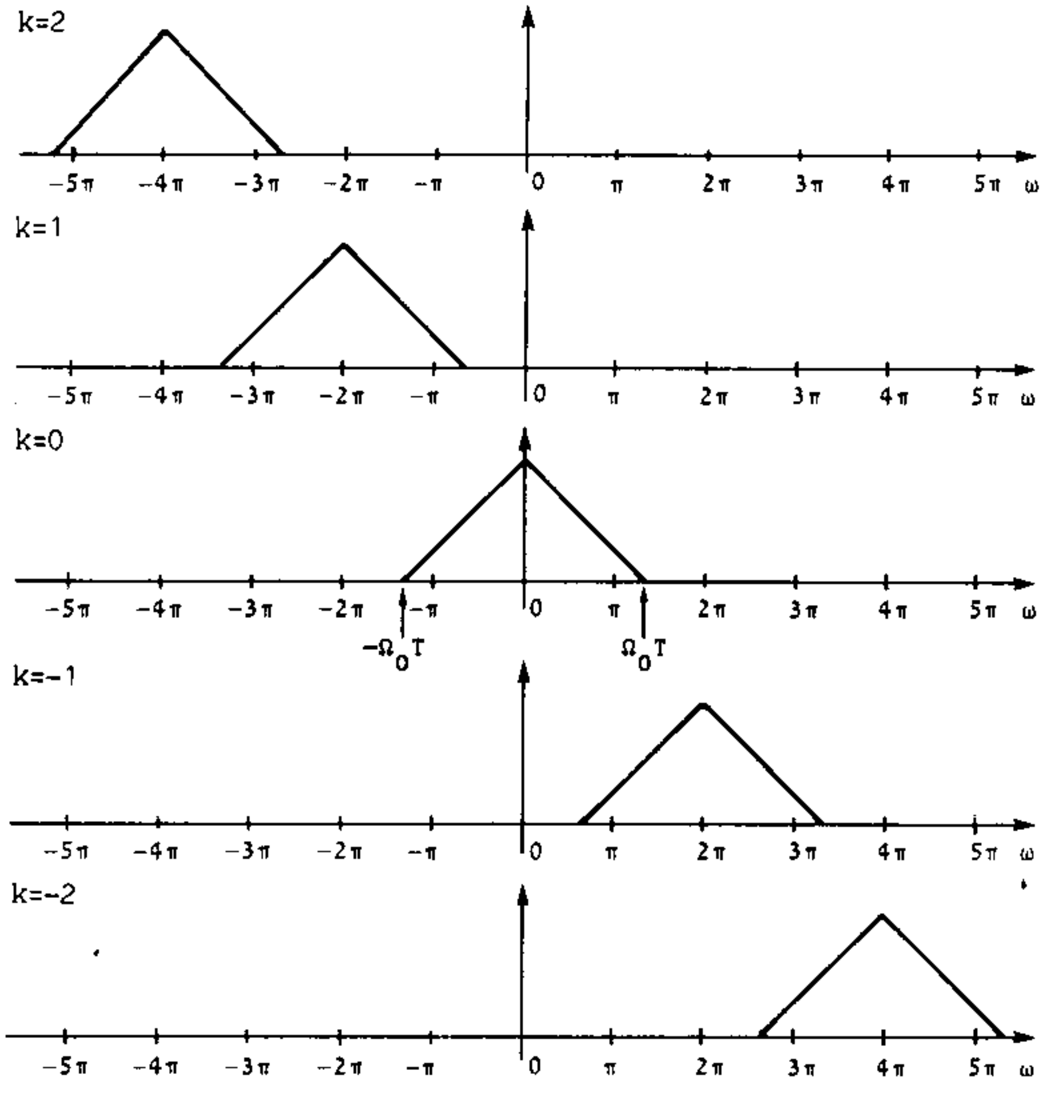
ב. שרטט את התמרת פורייה של האות הדגום.

1.6 דגימת אותות מוגבלי פס בקצב נמוך מהקצב הקריטי

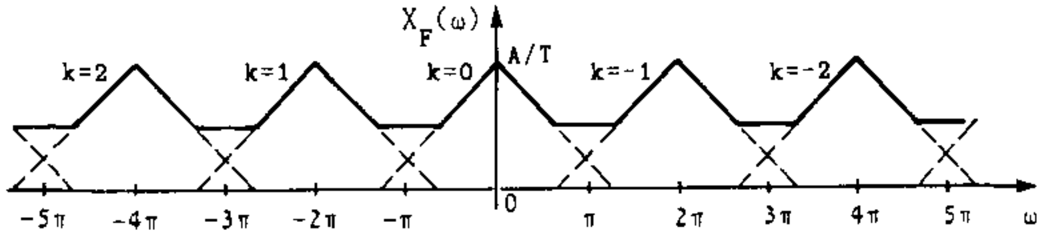
נדון עתה באותות מוגבלי פס הנדגמים כך שכלל נייקויסט איננו נשמר, כלומר:

$$\Omega_0 T > \pi \qquad (1\text{-}21)$$

נבחר שוב בדוגמה בה התמרת פורייה של האות $x(t)$ היא כמתואר באיור 1-3. איור 1-6 ממחיש את החזרות השונות של $X_\phi(\Omega)$ במקרה זה. כפי שרואים, הפעם יש חפיפה בין חזרות אלו, או במלים אחרות, יש "פלישה" של חזרה מסוימת לתחום התדירויות של החזרות הסמוכות. כאשר נסכם חזרות אלו כנדרש בנוסחה (1-19), נקבל את התמונה הנראית באיור 1-7.



איור 1-6 תיאור הפונקציות $\frac{1}{T}\cdot X_\phi\left(\frac{\omega+2\pi k}{T}\right)$ כאשר קצב הדגימה קטן מהקצב הקריטי



איור 1-7 התמרת פורייה של האות הדגום כאשר קצב הדגימה קטן מהקצב הקריטי

אנו רואים שבמקרה זה צורת הספקטרום אינה נשמרת - התמונה של התמרת פורייה $X_F(\omega)$ בתחום $-\pi < \omega < \pi$ **שונה** מתמונת ההתמרה המקורית $X_\phi(\Omega)$, לא רק בקנה המידה של הצירים אלא גם בצורה עצמה. השינוי בספקטרום נגרם עקב "פלישת" חזרות מתחום תדירויות אחד לתחומי התדירויות הסמוכים.

קיפול תדר
frequency folding

התחזות
aliasing

בהמשך נשתמש במונח התחזות, כדי למנוע בלבול בין קיפול תדר לקיפול (convolution).

תופעה זו נקראת בשם **קיפול תדר**, או **התחזות**. הסיבה היא (כפי שרואים באיורים 1-6 ו-1-7) שתדירויות גבוהות באות המקורי (ליתר דיוק, תדירויות Ω המקיימות $\Omega > \frac{\pi}{T}$) "מתחזות" כתדירויות נמוכות, והתנופות המתאימות מסתכמות. ניתן לסכם אפוא ולקבוע:

דגימת אות מוגבל פס בקצב דגימה נמוך מקצב נייקויסט (הקצב הקריטי) גורמת להתחזות וכתוצאה מכך - לעיוות הספקטרום של האות הדגום לעומת הספקטרום של האות המקורי.

ברור כי עיוות זה הוא תופעה לא רצויה ולכן יש להקפיד, בשימושים מעשיים, לבחור תמיד את מרווח הדגימה כך שיישמר הכלל של נייקויסט: קצב הדגימה צריך להיות גבוה מפעמיים רוחב הפס של האות הנדגם.

<u>הערה</u>: בדוגמה שהבאנו יש "פלישה", או התחזות, רק מתדרים סמוכים. אם נקטין עוד יותר את קצב הדגימה, תהיה התחזות גם מתדרים רחוקים יותר.

שאלה 9 - 1

חזור על שאלה 1-8 כאשר מרווח הדגימה הוא: $T = \frac{3\pi}{2\Omega_0}$.

להלן שתי דוגמאות ליישום מעשי של כלל נייקויסט.

דוגמה 3 - 1

בעיבוד אותות דיבור מקובל, ביישומים מסוימים, להסתפק במידע הכלול בתחום התדירויות 0-4 kHz. ביישומים אלה נהוג לדגום את אות הדיבור בקצב 8 kHz. כדי להבטיח עמידה בכלל נייקויסט (כלומר - למנוע התחזות), יש להעביר את אות הדיבור דרך מסנן מעביר נמוכים שתדירות הקטעון שלו 4 kHz **לפני הדגימה** - ראה איור 1-8. מסנן כזה נקרא **מסנן מונע התחזות**.

מסנן מונע התחזות
anti aliasing filter

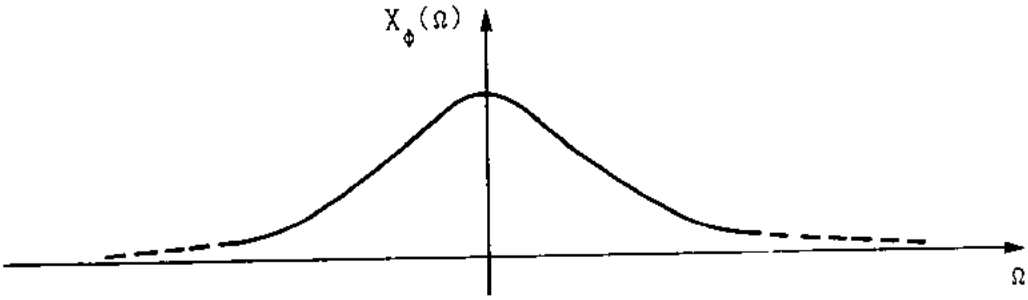
איור 1-8 דגימת אותות דיבור

דוגמה 4 - 1

אותות מוזיקליים הם ברוחב פס המגיע עד 20 kHz. לאחרונה, נפוצה הקלטה ספרתית של יצירות מוזיקליות על תקליטי לייזר. הקלטה ספרתית מחייבת דגימה של האות המוזיקלי. דגימה זו צריכה להיות בקצב שהוא לפחות 40 kHz, כדי לשמור על הכלל של נייקויסט, ולהימנע מעיוותי התחזות.

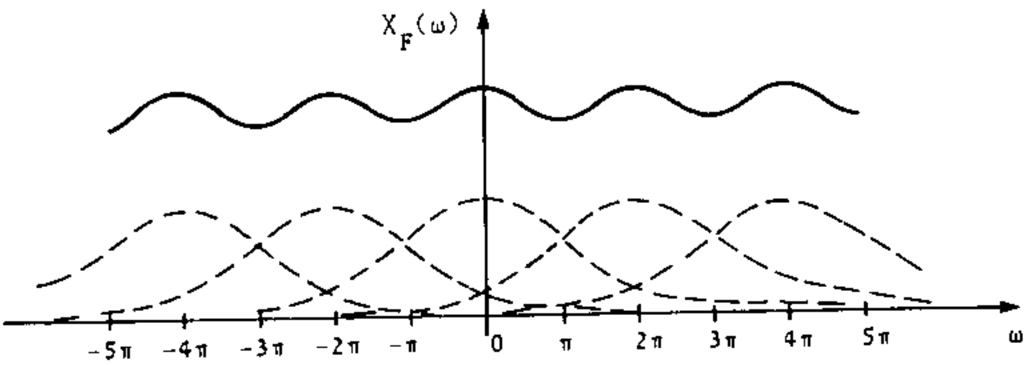
1.7 דגימת אותות שאינם מוגבלי פס

התמרת פורייה של אות בזמן רציף x(t) אינה חייבת להיות מוגבלת פס. ייתכנו מקרים בהם $X_\phi(\Omega)$ אינו מוגבל לתחום תדירויות סופי, אלא קיים בכל התדירויות $-\infty < \Omega < \infty$. מקרה כזה מומחש באיור 1-9.



איור 1-9 התמרת פורייה של אות שאינו מוגבל פס

ברור ממה שלמדנו בסעיפים הקודמים, כי במקרה זה אין כל אפשרות למנוע את תופעת ההתחזות, ואין זה משנה עד כמה נגדיל את קצב הדגימה. איור 1-10 ממחיש זאת. שים לב כי במקרה זה ההתחזות נגרמה על-ידי "הזנבות" של כל החזרות.



איור 1-10 התמרת פורייה של אות שאינו מוגבל פס לאחר דגימה

שאלה 10 - 1

ראינו בסעיף 1.4 כי התמרת פורייה של האות האקספוננציאלי $x(t) = e^{-\alpha t}$ היא $\frac{1}{\alpha+j\Omega}$, וכי התמרת פורייה של האות $x(nT)$ הדגום במרווח T היא $\frac{1}{1-e^{-(\alpha T+j\omega)}}$.

א. בחר $\alpha=1$ ו-$T=1$ וכתוב נוסחאות עבור הערכים המוחלטים של שתי ההתמרות.

ב. שרטט על מערכת צירים משותפת את הערכים המוחלטים של שתי ההתמרות בשני גרפים נפרדים. להלן מספר הנחיות:

1. רצוי לשרטט על נייר מילימטרי.
2. שים לב שבגלל ש-$T=1$, צירי ω ו-Ω מתלכדים ואין שינוי קנה

מידה). כמו כן, אין שינוי קנה מידה של ציר התנופה.

3. הסתפק בתחום $0 \le \omega \le \pi$. בתחום זה חשב לפחות 20 נקודות, כדי לקבל שרטוט מדויק.

4. שים לב לבעיית ההתחזות.

תריפותה של בעיית ההתחזות באותות שאינם מוגבלי פס הולכת ופוחתת ככל שמגדילים את קצב הדגימה. עם זאת, הגדלת קצב הדגימה כרוכה תמיד בחסרונות כגון: סיבוך החומרה המבצעת את הדגימה, נפח אחסון גדול יותר, קצב חישובים גבוה יותר וכו'. לכן, מקובל מאד בשימושים מעשיים לנקוט בדרך המתוארת בשלבים הבאים:

א. מעריכים, משיקולים פיזיקליים או ממדידות, את תחום התדירויות בו מתרכז עיקר הספקטרום של האות (או במלים אחרות - התחום שמחוץ לו תנופת הספקטרום היא קטנה מאד).

ב. מסננים את האות בעזרת מסנן מעביר נמוכים שתדירות הקטעון שלו שווה לתדירות העליונה של התחום הנ"ל. האות המסונן יהיה מוגבל פס לתחום תדירויות המעבר של המסנן.

ג. דוגמים את האות המסונן בקצב שהוא לפחות פעמיים תדירות הקטעון של המסנן, להבטחת העמידה בקצב נייקויסט.

נעיר כי גם לאחר ביצוע פעולות אלה, תישאר עדיין מידה מסוימת של התחזות, כי אין אפשרות לממש מסננים אידאליים. חשוב לתכנן את המסנן כך שיבטיח מידת התחזות קטנה דיה ליישום המסוים.

1.8 סיכום

נחזור ונסכם את עיקרי הדברים שלמדנו בפרק זה.

* דגימה אידאלית של אות בזמן רציף $x(t)$ במרווח דגימה T יוצרת את האות בזמן בדיד $x(nT)$.

* דגימה של אות סינוסואידלי בזמן רציף יוצרת אות סינוסואידלי בזמן בדיד. התנופה והמופע של האות נשמרים, ואילו הקשר בין התדירויות הוא:

$$f_0 = F_0T \quad ; \quad \omega_0 = \Omega_0T$$

* אותות סינוסואידליים שהתדירויות שלהם נבדלות בכפולה שלמה של $\frac{1}{T}$ יוצרים, לאחר דגימה במרווח T, אותות דגומים זהים.

* כדי לאפשר זיהוי חד-משמעי של תדירות אות סינוסואידלי בזמן רציף מתוך האות הדגום, חייב מרווח הדגימה לקיים את המגבלה:

$$T < \frac{1}{2F_0}$$

* בין התמרת פורייה של אות בזמן רציף לבין התמרת פורייה של האות המתקבל ממנו על-ידי דגימה קיים הקשר המתמטי:

$$X_F(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_\phi\left(\frac{\omega+2\pi k}{T}\right)$$

* התמרת פורייה של אות דגום מתקבלת מהתמרת פורייה של האות המקורי על-ידי:

א. שינוי קנה המידה של ציר התדירות בגורם T.

ב. שינוי קנה המידה של ציר התנופה בגורם $\frac{1}{T}$.

ג. הרחבה מחזורית של ההתמרה המקורית וסיכום החזרות האלה.

* כאשר אות מוגבל פס שרוחב הפס שלו F_0 נדגם בקצב $\frac{1}{T}$ המקיים $\frac{1}{T} > 2F_0$ (קצב זה נקרא הקצב הקריטי או קצב נייקויסט), צורת הספקטרום של האות הדגום אינה מתעוותת ביחס לצורת הספקטרום של האות הנתון.

* כאשר אות מוגבל פס שרוחב הפס שלו F_0 נדגם בקצב המקיים $\frac{1}{T} < 2F_0$ (קצב נמוך מהקצב הקריטי), נוצרת תופעה של התחזות. תופעה זו גורמת לעיוות הספקטרום של האות הדגום ביחס לספקטרום של האות הנתון.

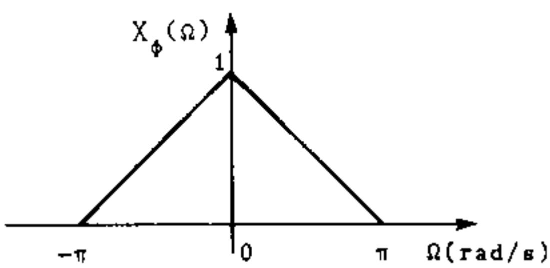
* כאשר דוגמים אות שאיננו מוגבל פס, יש תמיד התחזות ולכן יש תמיד עיוות של ספקטרום האות הדגום ביחס לספקטרום האות הנדגם. עיוות זה קטן ככל שמגדילים את קצב הדגימה. רצוי תמיד לסנן אות שאיננו מוגבל פס סינון מוקדם, ולאחר מכן לדגום את האות בקצב שהוא לפחות כפול מתדירות הקטעון של המסנן.

שאלה 11 - 1

האות $x(t) = \sin(2\pi\times 0.15t) + 2\sin(2\pi\times 0.6t)$
נדגם במרווח $T = 1\ s$. ערכי האות הדגום $x(nT)$ נרשמו בטבלה ונמסרו לאדם מסוים ללא כל מידע נוסף. האדם התבקש לחשב, על סמך הנתונים שבטבלה, את שתי התדירויות של רכיבי האות. התשובה שמסר האיש היתה כי התדירויות הן 0.15 Hz ו-0.4 Hz. הסבר את הסיבה לטעות שעשה האיש.

שאלה 12 - 1

באיור 1-11 נתון הספקטרום של אות בזמן רציף.



איור 1-11 איור לשאלה 1-12

האות נדגם שלוש פעמים נפרדות, פעם במרווח $T = 1.1\ s$, פעם שנייה במרווח $T = 1.5\ s$, ופעם שלישית במרווח $T = 2\ s$.

שרטט את הספקטרום של האות הדגום בתחום $-\pi \leq \omega \leq \pi$ בכל אחד משלושת המקרים. מהי מסקנתך לגבי הקשר בין מידת העיוות של הספקטרום לבין קצב הדגימה?

שאלה 13 - 1

עובד במוסד רפואי התבקש לדגום אות אלקטרואנצפלוגרפי (EEG) ולרשום אותו בהקלטה ספרתית. העובד ידע שהתדירות האופיינית של אות כזה היא כ-20÷30 Hz ולכן החליט, ליתר בטחון, לדגום את האות בקצב 60 Hz. להפתעתו גילה, כשחישב את התמרת פורייה של האות הדגום, רכיב חזק בתדירות 10 Hz. האם תוכל להסביר תופעה זו?
רמז: הבידוד החשמלי של מערכת המדידה מהרשת החשמלית היה לקוי.