

# יופי של מספרים וצלילים

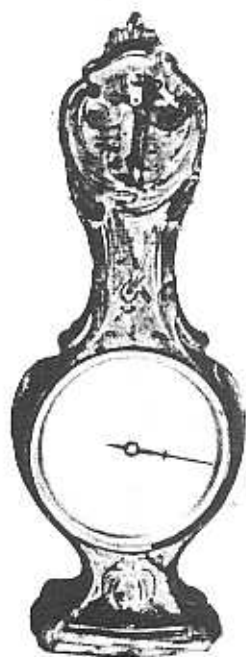
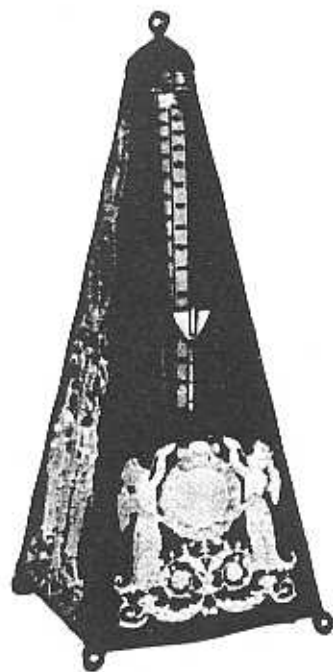
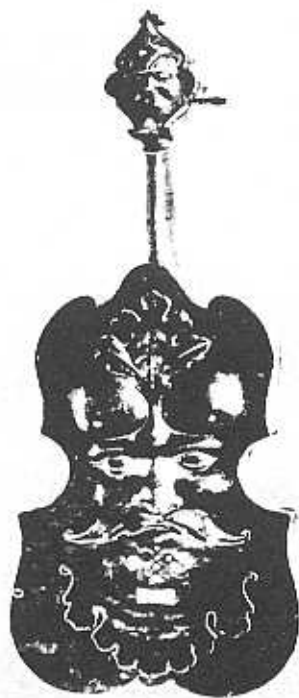
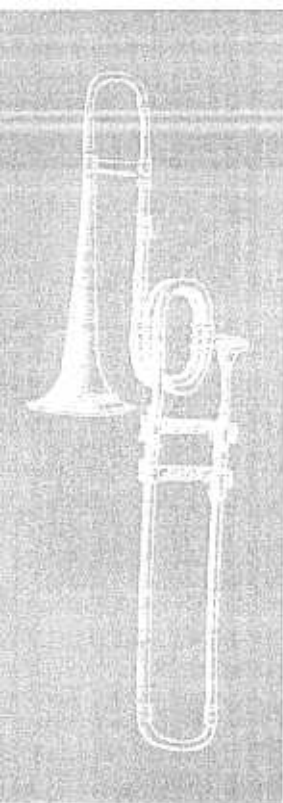
מוזיקה, שרבים תופשים אותה כאמנות הנעלה והשמימית ביותר, קשורה קשר הדוק למתמטיקה ולמספרים, בעיקר כשמדובר בסולמות המוזיקליים השונים ובהרמוניות. מעט על הקשר שבין מלכת המדעים למלכת האמנויות

## מאת: יקיר שושני

אוקטבה (ראו להלן), כאשר יחס האורכים בין המיתרים הוא 1:2. יתכן שתוצאה זו חיזקה בלבו את השערתו ש"הכל מקסר", כלומר שכל תופעה טבעית ואף אנושית ניתנת להצגה מלאה בעזרת יחסים פשוטים בין מספרים. חלק מהשימושים שהציע למספרים נראה לנו כיום מוזר מאד. כך, למשל, סבר שהמספר 4 מסמל את הגבר וגם את ניגורו – האשה. בין תלמידיו, הפיתגוראים, היו שטענו שכוכבי הלכת משמיעים את "ההרמוניות השמימיות" (ההרמוניות

ה למתמטיקה ולמוזיקה? האם עולם התחושות והחוויות הנפרש בתודעתנו בעת שאנו מאזינים ל"תשיעית" של בטהובן, או לקטע ג'אז, ניתן לאיפיון, ולו באופן חלקי, על ידי מספרים, בדומה למציאות הפיזיקלית? פיתגורס, שחי ביוון הקדומה לפני כ-2500 שנה היה הראשון שהצביע על הקשר בין צלילים ומספרים. הוא הראה כי ציודפי צלילים ערבים לאוזן – הרמוניות מוזיקליות – התקבלו בכלי מיתר כאשר יחסי האורך בין המיתרים היו ביחס פשוט בין שני מספרים שלמים. כך, למשל, שני מיתרים העשויים מאותו חומר ובעלי אותו העובי מפיקים צלילים דומים מאד מבחינה מוזיקלית, שהמרווח ביניהם הוא

1. פיתגורס עצמו הפיק את המרווחים מחלוקת אותו מיתר עצמו, שיטה ששמשה במנוכור, הכלי העיקרי ללימוד התיאוריה המוזיקלית ביוני הביניים.



"שערות". העיוות המחזורי של ה"שערות" הללו גורם שינויים חשמליים בתאי חוש השמע, שינויים המתבטאים בהפרשה של שליח-עצבי (נוירוטרנסמיטר), המפעיל את סיבוני עצב השמע, ואלה מעבירים את המידע למרכזי השמיעה שבמוח. מרכזים אלה מפענחים כקולות את האותות העצביים המגיעים אליהם, ומפענחים בהם צלילים, מוזיקה ומילים, ומקשרים זאת לתחושות ולחוויות. התהליכים המוחיים האלה טרם פוענחו כל צורכם, והתחום הידוע כפסיכרמוזיקה לוט באי-ידיעה. לעומת זאת, אנו יודעים לתאר באופן איכותי וכמותי את התהליכים הפיזיקליים החל מרגע יצירת הצליל בכלי הנגינה ועד הגעת התנודות החשמליות למרכזי השמיעה.

מסתבר שחלק מתחושות ההנאה מהמוזיקה שאנו שומעים, ביחוד אלו הקשורות לסולם הצלילים, להרמוניות המוזיקליות, לסטרורקטורות של היצירות המוזיקליות ולמודולציות (מעברים מסולם אחד לשני ביצירה המוזיקלית) ניתן להסביר על בסיס מתמטי, עליפי המיאור הכמותי של הצלילים.

### צירופים ערבים זה לזה

את הצלילים – אבני הבניין של השפה המוזיקלית, ניתן לאפיין באופן כמותי מדויק על ידי מספר תכונות: משך, עוצמה, גובה (pitch), וגוון. משך הזמן הבסיסי במוזיקה, שנהוג לכנותו "שלם", ניתן לחלוקה, על פי קצב היצירה, למספר שונה של חלקים. כך, למשל, אם ככל שלם יש 4 צלילים שווים מבחינת משך, אומרים שקצב המוזיקה הוא "ארבעה רבעים"  $4/4$ , ואם השלם מחולק ל-3 צלילים בעלי אותו משך – הקצב מכונה  $3/4$ . קיימים, כמובן,

של הספירות) בעת תנועתם במסילותיהם, אלא שאנו איננו מדענים למוזיקה מופלאה זו משום שאנו שומעים אותה מרגע לידתנו.

### מתנודות אוויר לתנודות נפש

חקר ההרמוניות בין הצלילים השונים שימש במהלך הדורות כאמצעי לבניית הסולם המוזיקלי שצליליו הם אבני הבניין של השפה המוזיקלית. שפה זו נשגבת יותר מהשפה המילולית, כך סבר הפילוסוף ז'אן-ז'ק רוסו, לא רק משום שהיא מאפשרת הקשורת רגשית עמוקה יותר בין יוצר המוזיקה למאזן, אלא גם בשל היסודות המתמטיים המאפיינים אותה<sup>2</sup>. כלומר, היא הרבה יותר אנליטית משפת הדיבור, מאחר שהיחסים שבין היסודות הבסיסיים ביותר שבה – הצלילים, הם יחסים מספריים פשוטים.

כאשר כלי נגינה מפיק צליל מסוים, הוא גורם לרטט האוויר המקיף אותו. תנודות אלו מועברות בצורת גלי לחץ דרך האוויר, עד אשר הן מגיעות לאוזנינו וגורמות לרטיטת "עור התוף" המקשר בין האוזן החיצונית לאוזן התיכונה. רטט עור התוף הופך לעזוועים מכאניים בעצמות השמע הזעירות, זעזועים הגורמים תנודות בנוזל שבאוזן הפנימית. תנודות נוזל זה גורמות לתנודות של שכבת תאי חוש השמע שב"שבלול" האוזן הפנימית. כל אזור לאורך פיתוליו של השבלול יכול לרטוט בתדר מסוים. רטט זה גורם לעיוות מחזורי של שלוחות מיקרוסקופיות של תאי חוש השמע, שלוחות המכונות

2. בימי הביניים נכללה המוזיקה ב"Quadrivium" – "ארבע האמנויות": אריתמטיקה, גיאומטריה, מוזיקה ואסטרונומיה.

3. וואלם רוסו התנגד להרמוניה, והדגיש דווקא את ייחודה של כל קבוצה נתנית.



קצבים מסובכים יותר. עוצמת הצליל גם היא ניתנת לכימות – עוצמת הצליל קשורה לשינוי בלחץ האוויר שיוצר גל הקול, אלא שהמוזיקאים

## האופי המתמטי הבולט ביותר בתורת הצלילים קשור לגובה הצליל ולגוון שלו

יחס בין שני מספרים שלמים קטנים. ככל שהמספרים השלמים בהם מדובר קטנים יותר, צירוף הצלילים ערב יותר לאוזן. למשל, יחס 2:1 מגדיר שני צלילים שהמרחק ביניהם מכונה בשפת המוזיקה "אוקטבה" (אוקטבה – מלשון 8) מכיוון שהם מרוחקים זה מזה 8 טונים, למשל, מדו נמוך לידו גבוה יותר. אם נשמיע יחד צליל מסוים ואת האוקטבה שלו נקבל את ההרמוניה הטובה ביותר. למעשה שני צלילים כאלה נשמעים לאוזן מאד דומים זה לזה. כך למשל אם ננגן את

טבלה א   על מרווחים והרמוניות	מרווח	אוקטבה	קווינטה	קוורטה	טרצה
	יחס תדרים	2:1	3:2	4:3	5:4
	מרחק בחצאי טונים בין הצלילים	12	7	5	4

**דוגמאות:** דוגמה לאוקטבה: המרווח בין דו לדוֹאוקטב א בין סול לסולֹאוקטב. דוגמה לקווינטה: המרווח בין דו ליסול, או בין רה ללה. דוגמה לקוורטה: המרווח בין דו ליפה או בין סול לדוֹאוקטב. דוגמה לטרצה: המרווח בין דו לימי או בין סול ליסי.

אינם משתמשים בתיאור מספרי מדויק לעוצמת הצליל ביצירותיהם, ובמקום זאת הם משתמשים במילים כגון "חלש" (Piano) או "חזק" (Forte). ואולם, האופי המתמטי הבולט ביותר בתורת הצלילים קשור לגובה הצליל ולגוון שלו.

גובה הצליל קשור לתדר (Frequency) של גל הקול, כלומר למספר הפעמים שגל זה רוטט בשנייה (יחידת התדר היא "הרץ" – תנודה אחת בשנייה). ככל שתדר הגל גבוה יותר כן הצליל גבוה יותר. כך למשל הצליל "לה" (A) המרכזי בפסנתר מתאים לגל קול הרוטט בתדר 440 תנודות לשנייה (440 הרץ). גלי הקול נוצרים כתוצאה של רטט מיתרי־הקול שבגרון (וראו: קטיס רייס – "שרירי שירה", גליליאו 39), מיתרים בכלי מיתר, קורמויות (ממברנות) בכלי הקשה.

הצליל "לה" המרכזי בפסנתר, המתאים לתדר 440 הרץ, ומיד לאחריו את הצליל "לה" הגבוה ממנו באוקטבה (המתאים לתדר כפול, 880 הרץ), שני הצלילים ישמעו כמעט זהים זה לזה. צירוף שני צלילים שיחס התדרים ביניהם הוא 3:2, כלומר שתדר הצליל האחד גבוה פי 3/2 מהשני, גם הוא ערב מאד לאוזן.

צלילים כאלה מרוחקים זה מזה במקלות הפסנתר ב־7 חצאי טונים. אם נשמיע יחד את הצלילים "דו" ו"סול" הצירוף ישמע הרמוני כי יחס התדרים בין שני צלילים אלה הוא יחס המספרים 3/2, כלומר, תדר הצליל "סול" גבוה פי 3/2 מתדר הצליל "דו" (המרחק בין 2 צלילים אלה הוא 7 חצאי טונים). הדבר נכון גם ביחס לצמד הצלילים "מי" ו"סי" (תוכלו להיווכח בכך אם תנגנו צמדי צלילים אלה בפסנתר). מרווח כזה בין שני צלילים יקראו בשם "קווינטה" (מלשון 5, משום שהצליל הגבוה יותר נמצא 5 טונים מעל הנמוך. כך, למשל, "סול" בא במקום החמישי אחרי "דו": דו, רה, מי, פה, סול).

צירוף הרמוני נוסף הוא

כאשר משמיעים בהרבעת מספר צלילים שונים, נוכחים לדעת שלקצתם צירוף הצלילים נעים מאד לאוזן – ואז אנו אומרים שצירוף הצלילים מהווה קונסוננס, או צירוף הרמוני. אך במקרים רבים צירוף הצלילים אינו ערב לאוזן, ובמקרה זה אנו אומרים שהוא מהווה צירוף לא־הרמוני, או דיסוננס. מהי התכונה הקובעת האם צירוף מסוים של צלילים הוא הרמוני או לא? מסתבר שניתן לתת לשאלה זו תשובה כמותית ברורה. צירוף צלילים הרמוני כאשר יחס התדרים של גלי הקול המתאימים לצלילים הללו הוא יחס מספרי פשוט, כלומר



טבלה ב   הסולם המתקבל על פי מעגל הקווינטות													
דואוקטב ומעלה	סי	לה דיאז	לה	סול דיאז	פה דיאז	פה	מי	רה דיאז	רה	דו דיאז	דו	צליל	
1059	992	942	882	837	784	744	706	661	628	588	558	523	תדר כוֹרץ

הוא צירוף הרמוני נעים לאוזן? התשובה לכך נעוצה בעובדה שכאשר אנו מפיקים צליל מכלי גנינה מסוים, למשל גיטרה או כינור, הצליל אינו "נקי". הוא כולל קבוצה גדולה של צלילים עיליים (Overtones) שיעוצמתם פוחתת והולכת ביחס לצליל היסודי. כך למשל כאשר משמיעים את הצליל "דו" במיטרה, צליל זה כולל גם את "דוֹ-אוקטב" (= דו הגבוה באוקטבה אחת, דהיינו: שתדירותו כפולה) וכן את "סול־אוקטב", ועוד שורה ארוכה של צלילים. הפיזיקה מלמדת אותנו שהיחס בין התדרים של הצלילים העיליים לבין הצליל היסודי עצמו הוא יחס מספרי פשוט. לפיכך, כאשר משמיעים יחד שני צלילים שיחס התדרים שלהם הוא הרמוני, כמו 3:2, הצליל הגבוה מבין השניים מתלכד עם אחד הצלילים העיליים של הצליל הנמוך יותר, ומגביר את עוצמתו, וכך צירוף שני הצלילים ערב לאוזן. קסבר פיזיקלי זה אינו שלם, מכיוון שאין בכוחו להסביר את התחושה הנעימה כחוריה, ואולם התיאור המתמטי של הצלילים מאפשר לברור מִבֵּין האוסף העצום של נתונים קוליים המגיעים לאוזנינו את אלה שיש בכוחם לגרום לנו הרגשת נעימות, אם כי אינו מבינים די הצורך את הסיבות לכך.

מדוע צירוף שני צלילים שיחסם אינו הרמוני צורם? הפיזיקאי והפסיכולוג הלמהולץ ייחס את הסיבה לכך להיווצרות "פעיימות" (beats) בין שני צלילים שיש להם תדר קרוב זה לזה. אם תפרטו

צירוף שני צלילים שיחס התדרים שלהם הוא 4:3, כלומר, תדר הצליל הגבוה מביניהם גבוה פי 4/3 מתדר הצליל הנמוך. צלילים כאלה מרוחקים זה מזה 5 חצאי טונים. למשל הצלילים "דו" ו"פה", או צמד הצלילים "רה" ו"סול". המרווח בין שני צלילים כאלה נקרא בשם "קוורטה" (מלשון 4, מאחר שהצליל הגבוה יותר נמצא במקום הרביעי מהנמוך, למשל: "פה" ו"דו"; דו, רה, מי, פה). מרווח הרמוני נוסף, המכונה "טרצה" (מלשון 3), כולל 2 צלילים שיחס התדרים ביניהם הוא 5/4, כלומר תדר הצליל הגבוה יותר הוא פי 5/4 מתדר הצליל הנמוך. למשל, המרווח בין "דו" ל"מי", או בין "סול" ל"סי" הוא טרצה. המרווח בין שני צלילים כאלו הוא 4 חצאי טונים (טבלה א).

יש להדגיש שבכל צירוף הרמוני נוכל לבחור בצליל ראשון כלשהו, כשהצליל השני נקבע על פי המרווח בין הצלילים המתאים להרמוניה המבוקשת. למשל, אם הצליל הראשון הוא "מי" אזי הקוינטה שלו "סי" (המרווח 7 חצאי צלילים מ"מי"), והטרצה שלו "סול דיאז" המרווח 4 חצאי טונים ממנו.

### פעיימות וסולמות

שתי שאלות יסודיות עולות מכך. ראשית: מדוע צירוף שני צלילים שיחס התדרים שלהם הוא ייחס בין שני מספרים שלמים קטנים

## סולם מעגל הקווינטות

בארץ זה נמשיך:  $f_5 \times \frac{3}{2} = 882 \times \frac{3}{2} = 1323$ , מכיוון שתדר זה גבוה מהתדר דוֹ-אוקטב (1046), נחשב את הצליל הנמוך ממנו באוקטבה ונקבל  $f_6 = \frac{1323}{2} = 661.5$ , המתאים לצליל "מי" הנמצא 7 חצאי טונים מעל "לה". אם נמשיך בחישוב כזה 12 פעם נגיע בסופו של התהליך לצליל שהתדר שלו מתאים בערך לתדר הצליל דוֹ-אוקטב. על כן, אם בוים סולם על פי מעגל הקווינטות הוא יכיל את 12 הצלילים, כפי שנראה בטבלה:

התדר המתאים לצליל "דו" הוא 523 הרץ. האוקטבה שלו היא  $2 \times 523 = 1046$  הרץ. הקוינטה שלו:  $f_3 = 523 \times \frac{3}{2} = 784$  הרץ. תדר הקוינטה של  $f_3$  הוא  $f_4 = 784 \times \frac{3}{2} = 1176$ , ואולם תדר זה גבוה מתדר דוֹ-אוקטב (1046). על כן נחלק זאת ב-2, כדי למצוא את הצליל הנמוך באוקטבה מהצליל בעל התדר 1176, ונקבל:  $f_4 = \frac{1176}{2} = 588.3$  הרץ. תדר זה מתאים לצליל "רה". הצליל הבא יהיה מרוחק קוינטה מ" $f_4$  כלומר,  $f_5 = 588 \times \frac{3}{2} = 882$  הרץ. המתאים לצליל "לה" הנמצא 7 חצאי טונים מעל "רה".

דואוקטב ומעלה	פה	לה דיאז	לה	סול דיאז	דו דיאז	פה דיאז	סי	מי	רה	סול	דו	צליל
1059	706	942	882	837	558	744	992	661	588	784	523	תדר

סדר הצלילים לפי סדר התדרים יצר את הסולם המתקבל על פי מעגל הקווינטות (טבלה ב).



יחד על שני מיתרים בגיטרה שיש להם צלילים מאד קרובים, תשמעו כעין פעימות המהוות "רעש רקע" הפוגם בהנאה.

קיימות שאלות מעניינות נוספות הקשורות לסולם המוזיקלי: מדוע חולקה האוקטבה במוזיקה המערבית ל-12 צלילים דווקא? מה קובע את יחס התדרים בין צליל בסולם לצליל הבא אחריו, הגבוה ממנו בחצי טון (למשל, יחס התדרים בין "דו" ל-"דו דיאז")

יוהאן סבסטיאן באך. זה היה סולם נות, מכיוון שגם ההרמוניות האחרות, כמו טרצה וקוורטה, התקיימו בו<sup>5</sup>. יחד עם זאת, התעוררו בעיות: למשל, היחסים בין התדרים של שני חצאי טונים סמוכים לא היו קבועים. כתוצאה מכך, בכלי נגינה הבנוי לפי סולם זה מידת הדיוק בהרמוניות תלויה בצליל היסודי של הסולם. על כן יתכן בהחלט שהרמוניות ישמעו "נקיות" יותר בסולם "דו" מאשר בסולם

טבלה ג   סולם האיזון המושווה												
דו	סי	לה	סול דיאז	סול	פה דיאז	מה	רה דיאז	רה	דו דיאז	דו	צליל	תדר
1046	987	932	880	830	784	740	698	659	622	587	554	523

המתחיל ב"רה". וכן, ביצירות מוזיקליות רבות קיימים מעברים בין סולם אחד לשני (מעברים שהמוזיקאים מכנים מודולציות), כך שאם היצירות הללו מנוגנות בכלי נגינה שנבנו על פי מעגל הקוינטות, המעברים הללו עלולים להישמע צורמים.

### סולמו של גאון

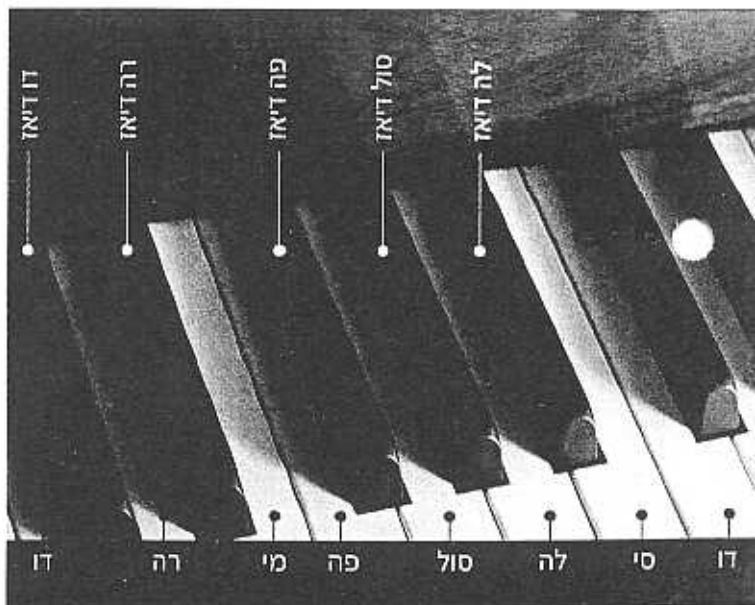
הבעיות הללו הניעו את המוזיקולוגים לנסות ולשכלל את אופן החישוב של צלילי הסולם, ולהעמיד אותו על בסיס אחיד יותר. לצורך זה השתמש יוהאן סבסטיאן באך בשיטת ה"איזון המושווה" וחיבר יצירה לפסנתר שנועדה להדגים זאת, אותה כינה "הפסנתר המושווה היטב"<sup>6</sup>. הרעיון היה מבוסס על ההנחה שהיחס בין התדרים של כל שני צלילים סמוכים בסולם חייב להיות קבוע. אם נסמן יחס זה באות  $r$ , ואת תדר הצליל היסודי בסולם באות  $f_0$  אזי תדר הצליל השני יהיה  $f_1 = r \cdot f_0$ , תדר הצליל השלישי יהיה  $f_2 = r \cdot f_1 = r^2 \cdot f_0$ , וכך הלאה. מאחר שהצליל ה-12 הוא האוקטב של הצליל היסודי, ערכו צריך להיות  $2f_0$  ולכן:  $r^{12} \cdot f_0 = 2f_0$ . בחישוב קל מתברר כי ערכו של  $r$  הוא 1.05946. על פי יחס זה נבנית טבלת תדרים לסולם המוזיקלי המתחיל בצליל דו בשיטת ה"איזון המושווה" (טבלה ג). תדר כל צליל בטבלה זו גבוה פי 1.05946 מהצליל הקודם לו.

בסולם המתקבל בשיטת האיזון המושווה יחס התדרים בין כל שני

או בין "מי" ל"פה"? לשאלות אלו יש טעם, בין היתר מכיוון שקיימות תרבויות מוזיקליות בהן האוקטבה חולקה ל-5 חלקים (הסולם הפנטוני), למשל המוזיקה במזרח הרחוק. התשובות לשאלות הללו קשורות למה שמכונה במוזיקה "מעגל הקוינטות". מסתבר ששתי הרמוניות מספיקות כדי להמיר את כל 12 הצלילים בסולם המערבי, והן האוקטבה (יחס 2:1) והקוינטה (יחס 3:2). אם נצא מצליל יסודי מסוים, נניח "דו", בעזרת היחסים הללו ניתן לקבל (כמבואר בתיבה: סולם מעגל הקוינטות) את כל 12 הצלילים של הסולם המוזיקלי המתחיל בצליל "דו" (טבלה ב).

### שליבים בסולם

לסולם המוזיקלי הזה יש חסרונות. למשל, היחס בין שני צלילים סמוכים בסולם אינו קבוע. אמנם, ההפרש בין היחסים אינו גדול, ועל כן נשכיינו את כלי הנגינה על פי מעגל הקוינטות חיסרון זה נמנעט שלא הורגש. ואכן, סולם זה היה מקובל עד תקופתו של



4. למשל, יחס התדרים בין "דו דיאז" ל-"דו" הוא:  $\frac{588}{523} = 1.0669$  ואילו היחס בין "רה" ל-"דו דיאז" הוא:  $\frac{588}{558} = 1.0537$ .

5. כך למשל, יחס הצלילים בין "פה" ל-"דו" הוא:  $\frac{706}{523} = 1.35$ . קרוב מאד לקוורטה  $\frac{4}{3} = 1.34$  ויחס הצלילים בין "סי" ל-"דו"  $\frac{661}{523} = 1.26$ . קרוב מאד לטרצה  $1.25 = 1.25$ .

6. למעשה, השיטה המושווה הוצעה על ידי ז'אן-פיליפ ראמו (1683-1764), מוזיקאי ומוזיקולוג צרפתי. ראמו נתן בזמנו את ההסבר החדשני ביותר לקשרים שבין מוזיקה, מתמטיקה ופיזיקה. י.ס. באך, בן זורו של ראמו, לא המציא את השיטה המושווה, אלא עשה בה שימוש. המונה המקורי של באך הוא Wolltenpercierte שפירושו "ממוג היטב".



צלילים סמוכים בו הוא, כאמור, קבוע, ולהרמוניות דיוק רב יותר<sup>7</sup>. על כן שיטת האיזון המושווה עדיפה על מעגל הקוינטות לצורך בניית הסולם המוזיקלי. מאחר שבשיטה זו יחס התדרים בין שני צלילים עוקבים הוא קבוע, איכות ההרמוניות בלתי תלויה בצליל היסודי של הסולם ואינה נפגעת במודולציות.

### מזרח/מערב = 12/5

האם ניתן להמיר סולם מוזיקלי שמספר הצלילים שבו יהיה שונה מ-12 ועדיין תישמרנה בו ההרמוניות? נניח שאנו מחלקים את האוקטבה למספר כלשהו ( $n$ ) של חלקים, כך שהיחס בין התדרים של כל שני צלילים הוא קבוע:  $z$ . יחס התדרים של הצליל השני לראשון יהיה  $z$ , יחס התדרים בין הצליל השלישי לראשון יהיה  $z^2$  וכן הלאה. יעזרת חישוב בסיסי מתברר כי בסולם המכיל 5 צלילים, יחס הקוינטה מתקבל בדיוק טוב (1.5157) וגם יחס התדרים 4/3 המתאים לקוורטה מתקבל בדיוק דומה (1.3195), אך יחסי התדרים הטובים ביותר עבור שלוש ההרמוניות – הקוינטה, קוורטה וטרצה – מתקבלים בסולם הכולל 12 צלילים. רואים, איפוא, שאם רוצים לבנות סולם מוזיקלי בו מתקבלות שלוש ההרמוניות היסודיות ברמת דיוק גבוהה ביותר, יש לחלק את האוקטבה ל-12 חלקים. אם מסתפקים בשתי הרמוניות, האוקטבה והקוורטה, הרי גם סולם הכולל 5 צלילים טוב למדי.

מתעוררת השאלה: האם קיים סולם הכולל  $n$  צלילים כך שיחס הקוינטה  $3/2$  מתקבל בו במדויק? מניתוח מתמטי מסתבר שהתשובה לכך היא שלילית: לא קיים מספר  $n$  כזה בו ההרמוניה  $3/2$  מתקבלת במדויק. אם כך ראוי לשאול: עבור אילו ערכים מתקבלות ההרמוניות בקירוב הטוב ביותר? נוכחנו כבר כי בטווח המספרים 2 עד 12 ומספרים הטובים ביותר הם  $n=5$  ו- $n=12$ . אם נרחיב לערכים גדולים מ-12 ייתברר כי הרמוניות מתקבלות בדיוק טוב מאד גם עבור  $n=41$ ,  $n=53$ . מובן מאליו שכאשר מגדילים את מספר הצלילים ( $n$ ) בסולם, ההפרש בין יחסי התדרים של שני צלילים סמוכים קטן

7. נבדוק, למשל, את יחס הקוינטה: יחס התדרים בין "סול" ל"דו"  $\frac{784}{523} = 1.499$  שווה בקירוב טוב מאד ל- $1.5 = \frac{3}{2}$  וכך גם היחס בין "לה" ל"רה"  $\frac{880}{587} = 1.499$ . יחס הקוורטה מתקבל בדיוק טוב מאד, למשל: יחס התדרים בין הצלילים "פה" ל"דו" הוא:  $\frac{698}{523} = 1.334$

ההולך, כך שהסבירות לקבלת ההרמוניות  $\frac{3}{2} = 1.5000$  ו- $\frac{4}{3} = 1.3334$  גדלה. סולם המכיל מספר גדול של צלילים, למשל 100 צלילים, ניתן למימוש (כינור יכול להפיק צלילים בתדר כלשהו בטווח מוגדר), אך השאלה האם אמנם ייתכן סולם מוזיקלי בן 100 צלילים שייכת לתחום הקוגניציה.

הסולם הפנטפוני, המכיל חמישה צלילים, משמש כאמור במוזיקת המזרח, בעוד הסולם המכיל 12 צלילים הוא כאמור הסולם הרווח במוזיקה המערבית.

היו מחיקולוגים שבנו את הסולם המכיל 41 צלילים, והצליחו לחבר יצירות פשוטות בסולם כזה. ואולם ראינו שככל שמספר הצלילים בסולם גדל, ההפרש בין שני צלילים סמוכים קטן; אם הפרש זה קטן מערך סף מסוים לא ניתן להבחין בין הצלילים הסמוכים. כמו כן הסתבר שסולם בו הרווחים בין הצלילים קטנים מאד ביחס לרווח של חצי טון לא הניב מוזיקה השונה באופן מהותי מזו המופרת במערב. מעניין לציין כי האדם (לאמור – המוזיקאים)

לידי ביטוי בצירוף הצלילים ליצירה אינה ניתנת להעמדה על בסיס מתמטי. יחד עם זאת, גם במבנים מוזיקליים יש רכיבים כמותיים התורמים תרומה חשובה ליופי שביצירה. כך, למשל, במספר ניכר של יצירות מוזיקליות, כמו בפרגות של יוהאן סבסטיאן באך, ישנם קטעים המהווים "כפילים" כמעט סימטריים של קטעים אחרים. הסימטריה משחקת איפוא תפקיד מרכזי ביותר, לא רק בתיאור המציאות הפיזיקלית המקרוסקופית (כמו בגבישים) והמיקרוסקופית (בתיאוריות



**ז'אן-זק רוסו סבר כי המוזיקה היא שפה נשגבת יותר מהשפה המילולית לא רק משום שהיא מאפשרת תקשורת רגשית עמוקה יותר, אלא גם בשל היסודות המתמטיים המאפיינים אותה**

ה"סופרסימטריה" לכוחות וחלקיקים יסודיים בטבע), אלא גם באמנויות (למשל בעבודותיו של אֶשֶׁר), וכפי שנוכחנו – גם במוזיקה. על הקשר בין היצירות של אשר ובאך לבין רעיונותיו של המתמטיקאי בן המאה העשרים קורט גדל, כתב הופשטר ספר מעניין ביותר שזכה בפרס פוליצר.

#### לקריאה נוספת:

1. שושני: **מחשבות על התבונה**, יצא לאור בקרוב בספריית ה"אוניברסיטה המשודרת", משרד הביטחון – ההוצאה לאור.
2. דליה כהן, **אקוסטיקה ומוסיקה**, הוצאת אקדמון, 1983.
3. **The Oxford Dictionary of Music**, 2<sup>nd</sup> Edition, Editor: Michael Kennedy, Oxford University Press, 1994.
4. [w.w.w.math.niu.edu/rusin/papers/uses-math/music](http://w.w.w.math.niu.edu/rusin/papers/uses-math/music)  
קורא המעוניין להרחיב את הדעת בנושא הסולם המוזיקלי הכולל יותר מ־12 צלילים, יוכל למצוא מידע מעניין באתר זה.
5. D.R. Hofstadter: **Godel, Escher, Bach; An Eternal Golden Braid**, 20<sup>th</sup> Edition, Basic Books, 1999.

איורים: דוד פולונסקי

יקי שושני, פרופ' לפיסיקה וחבר בצוות היועצים של גלילאו

הגיע לשני הסולמות האופטימלים מבחינה הרמונית – סולם פנטפוני וסולם כרומטי המכיל 12 צלילים – לא על סמך ניתוח מתמטי-תיאורטי, אלא בתהליך של ניסוי ותציה, המאפיין הרבה תהליכים אבולוציוניים. הניתוח התיאורטי מצדיק, בדיעבד, באופן מתמטי, את ההתפתחות הטבעית של הסולם המוזיקלי.

היו תרבויות רבות בהן ההרמוניה לא שיחקה תפקיד בהתפתחותם המוזיקלית מכיוון שלא היה בהן מקום מיוחד לזמרה במקלה, או למוזיקה רב-צלילית (פוליפונית) בה מנגנים מספר כלי נגינה באותו הזמן. ואכן תרבויות אלו פיתחו מערכת סולמות אחרת, למשל הסולמות הרווחים במוזיקה הערבית או המודית.

#### על עצב ועל גוון

ניתן לבנות סולמות שלא על פי האיזון המושווה. דוגמה אחת לכך היא הסולם המבוסס על מעגל הקוונטיות. דוגמה אחרת הוא הסולם הפנטפוני הכולל 5 צלילים, הסולם הרווח במוזיקה של המזרח הרחוק. צלילי סולם זה מתקבלים בפריטה על הקלדים השחורים בפסנתר החל מ־פה דיאז (הצלילים: פה-דיאז, סול-דיאז, לה-דיאז, דו-דיאז ורה-דיאז). אמנם, סולם זה כולל את ההרמוניות קווינטה וקוורטה, אך אין אפשרות להתחיל את הסולם בכל אחד מהצלילים שבנו. כך למשל, אם מתחילים את הסולם בצליל השני שלו, (סול-דיאז) מתקבלת נעימה שונה לחלוטין. כך גם בסולמות הדיאטוניים המחלקים את האוקטבה למספר מסויים של טונים וחצאי טונים על פי חוקיות הנקבעת על ידי מתכנן הסולם. למשל, הסולם הכולל את כל הקלדים הלבנים בפסנתר ומתחיל בצליל דו (סולם זה ידוע בשם דו-מג'ור). אם נתחיל את הסולם הזה בצלילו השני (רה) נקבל נעימה שונה לחלוטין (זה סולם רה-מינור, הנושא אופי יותר "עצוב"). הסולמות היחידים בהם המוזיקה אינה תלויה באיזה צליל בסולם מתחילים הם הסולמות הבנויים על בסיס עקרון האיזון המושווה; כאמור, רק בסולמות כאלה ניתן לעבור מסולם לסולם (לבצע מודולציות) ללא חשש בפגמת ההרמוניות.

ומשהו על גוון הצליל. כיצד אנו יכולים לדעת האם מקור צליל מסוים הוא כינור או חצוצרה? מסתבר שהתכונה הפיזיקלית המאפיינת את גוון הצליל קשורה קשר אמיץ לצלילים העיליים שלו. נוכחנו כי כל צליל המופק מכלי נגינה מאופיין על ידי צליל יסודי וצלילים עיליים שתדירותם היא מנפלה של מספר שלם בתדר הצליל היסודי. מה שמבחינך בין כלי נגינה שונים הן העוצמות היחסיות של הצלילים העיליים הללו. לכל כלי נגינה ולכל צליל המופק ממנו יש כעין "תעודת זהות" המוגדרת על ידי היחס בין העוצמות (החוזק) של הצלילים העיליים לעוצמת הצליל היסודי. האורגנים האלקטרוניים מנצלים עובדה זו כדי להפיק צלילים של כלי נגינה שונים על ידי הפקה של צלילים עיליים התואמים כל כלי נגינה מבוקש.

מובן שהיופי הכמוס ביצירות מוזיקליות אינו ניתן למיזוי בסולם הצלילים ובהרמוניות הנוצרות מהם. היצירותיות המוזיקלית הבאה