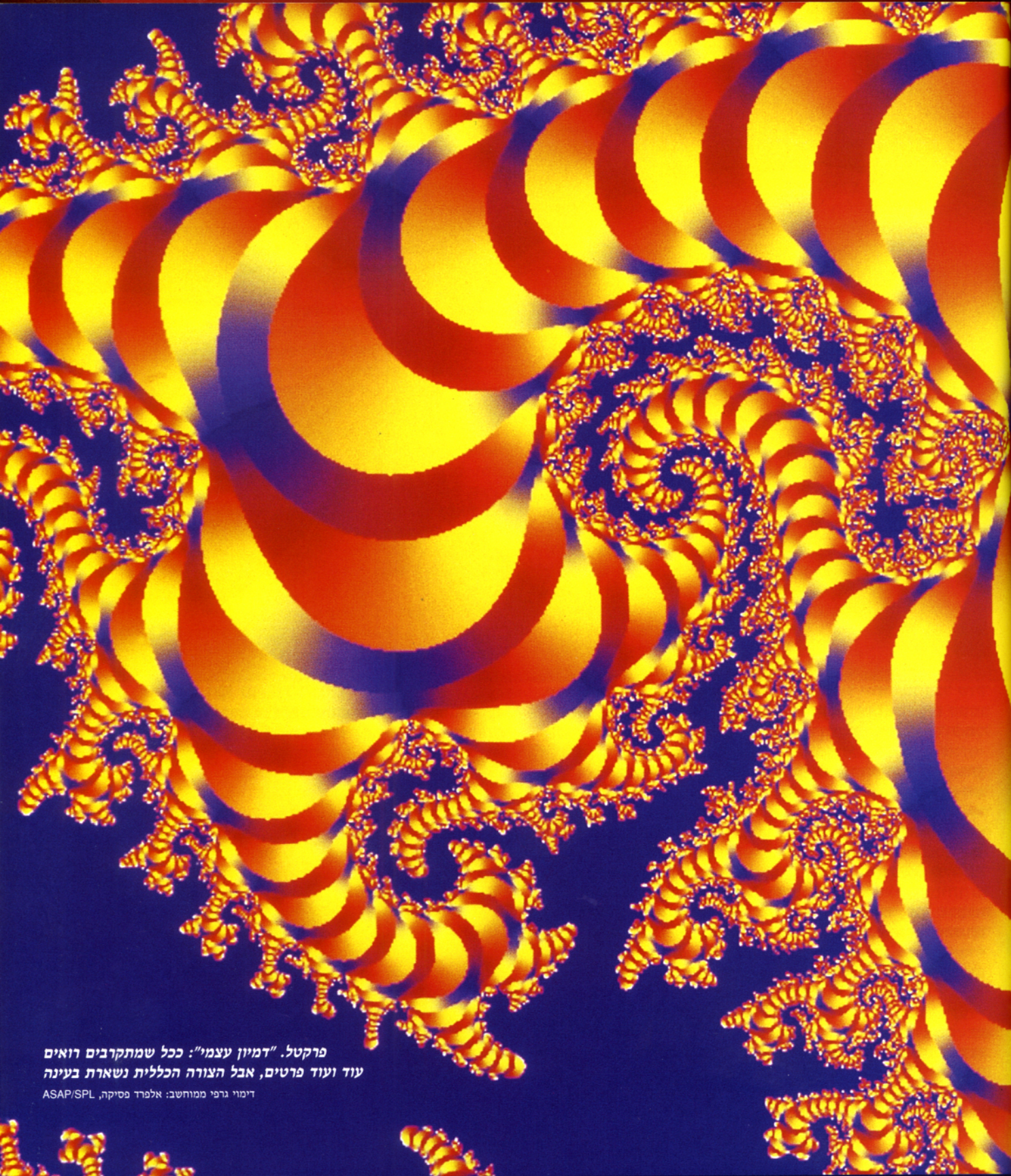


עולם חדש ונועז

כתב: יואב בן־דב



פרקטל. "דמיון עצמי": ככל שמתקרבים רואים
עוד ועוד פרטים, אבל הצורה הכללית נשארת בעינה
דימוי גרפי ממוחשב: אלפרד פסיקה, ASAP/SPL

צורות המחשבה החדשות של סוף המאה, כמו תורת הכאוס ותורת המורכבות, מציגות תמונה מסועפת של עולמות בתוך עולמות, של מציאות אחת לכאורה. מה המשותף למודלים מתמטיים ולזרמי הים, לשערי הבורסה ולצורת העננים, ולמה דווקא מקדשים בהודו הם הדוגמה הטובה ביותר לפיזיקה המודרנית? הזמנה למסע אחר בזמן ובמרחב

טאו של הפיזיקה", ספרו של פריטיוף קאפרה (Kapra) שיצא לאור באמצע שנות השבעים ותורגם מאז לעשרות שפות, כולל עברית, היה הראשון בשורה של ספרים שניסו למצוא הקבלות בין חידושי המדע המערבי לבין תכנים וסמלים מהתרבות המסורתיות של המזרח הרחוק. רוב כותבי הספרים האלה התעניינו במיוחד בתורת הקוונטים, אשר הפכה בתחילת המאה ה-20 לתיאוריה המרכזית של הפיזיקה. תורת הקוונטים אכן מנוגדת, במובנים רבים, לכמה מדרכי החשיבה שהיו מקובלות במדע המערבי, ואותם כותבים סברו כי במאגרי המושגים של תרבויות כמו סין והודו אפשר למצוא רעיונות והרגלי חשיבה שיתאימו לה יותר. אבל תורת הקוונטים אינה התורה המדעית היחידה של ימינו העומדת בניגוד לדרכי החשיבה ששלטו במדע המערבי של המאות הקודמות. משנות השישים ואילך, בעקבות מפגש של רעיונות מתמטיים חריגים שהועלו בתחילת המאה עם השימוש במחשבים לצורכי מחקר, התפתחו תחומי מדע חדשים החוצים את גבולות ההתמחויות המדעיות המקובלות; למשל, תורת הכאוס ותורת המורכבות. בדומה לתורת הקוונטים, גם התחומים החדשים האלה מתארים מציאות שאינה מוגדרת לעולם באופן מוחלט וסופי, ואשר אי-הוודאות והלא-צפי נוכחים בה תמיד. בכך הם חורגים מהמסגרות הישנות של המדע המערבי, ששאף להגיע לתיאור סופי ומוחלט של המציאות, שבה לא יהיה מקום לאי-וודאות.

האם אפשר למצוא קשרים והקבלות של תרבויות המזרח עם המדעים החדשים האלה? מאמר זה יעסוק באחד מענפי המחקר שלהם – התורה הגיאומטרית של פרקטלים (Fractal). כפי שנראה, אכן אפשר למצוא דמיון רב בין תכונותיהן של הצורות שמתארת הגיאומטריה הזו לבין מאפיינים בולטים באמנות, במיתוסים ובתמונת העולם של הודו. אולם ראשית, מה זה פרקטל?

ספרד, פורטוגל וקו פרשת המים

את המונח "פרקטל" טבע המתמטיקאי הצרפתי בנואה מנדלברוט



(Mandelbrot) באמצע שנות השבעים; אבל רעיונות דומים עלו לפני כן. למשל, בעבודותיו של חוקר רב-תחומי ותמהוני במקצת בשם לואיס פריי ריצ'רדסון (Richardson), שפעל בבריטניה במחצית הראשונה של המאה. ריצ'רדסון בדק את אורך קו הגבול בין ספרד לפורטוגל, ומצא שיש לו שני ערכים שונים: אורך קו הגבול מהצד הפורטוגלי גדול בכחמישית מאורך קו הגבול מהצד הספרדי.

איך זה יכול להיות? ובכן, המושג "אורך קו הגבול" הוא חמקני במקצת. קו הגבול עובר לעיתים קרובות בתווי טבעי. למשל, על קו פרשת המים של רכס הרים. כדי למדוד אורך של קו כזה, צריך להניח סרגל על קטעים של הקו בזה אחר זה, ואז לחבר את האורכים של כל הקטעים. לכאורה, התוצאה של מדידה כזו צריכה להיות מוגדרת וקבועה. אולם בפועל, קו פרשת המים מסובך מאוד למדי. אם מתבוננים בו מרחוק, למשל בתצלום לוויין, רואים אותו מתפתל בין רכסי ההרים הגדולים. אבל בתצלום קרוב יותר, אפשר להבחין גם בפיתולים ובעיקולים בין ההרים הבודדים. מקרוב יותר, אפשר לראות אותו מתעקל סביב כל עמק, פלג מים או גוש סלע. עים. קרוב עוד יותר נוכל להבחין גם בפיתולים סביב הסלעים הבודדים; בסופו של דבר, קו פרשת המים יכול להתפתל בין גרגירי חול בודדים או סביב שקעוריות זערורות באבן, שגם בהן יש נקבות ומחילות נוספות.

כאשר מודדים בסרגל את המרחק בין שתי נקודות, מודדים בעצם את אורכו של קטע ישר העובר ביניהן. בפועל, קו פרשת המים לעולם אינו עובר בין שתי נקודות בקו ישר, אלא מתפתל ביניהן. לפיכך, כאשר מודדים אותו באמצעות חיבור של קטעים ישרים, האורך שנמדד קטן מהאורך האמיתי, משום שהפיתולים הנוספים בין נקודות המדידה לא הובאו בתחילה בחשבון. אפשר להשתמש בסרגל קטן יותר, ואם מודדים על מפה, אפשר להשתמש במפה המשורטטת בקנה מידה גדול יותר. במקרה כזה, נוכל לעקוב אחרי יותר פיתולים, ולכן האורך שנמדד יהיה גדול יותר. אך ככל שנקטין את הסרגל או נגדיל את קנה המידה, תמיד יהיו פיתולים קטנים יותר שיחמקו מאיתנו; לכן האורך האמיתי תמיד גדול מכל מה שנצליח למדוד.

בעצם, האורך האמיתי של קו פרשת המים הוא אינסופי; ואולי נכון יותר להגיד כי המושג של אורך אמיתי הוא חסר משמעות עבורו. ככל שנתבונן בו מקרוב יותר, נראה עוד ועוד פרטים, ולכן אורכו הכללי ילך ויגדל. זה בדיוק מה שקרה לקו הגבול בין ספרד לפורטוגל. מכיוון ששטחה של פורטוגל קטן מזה של ספרד, המפות הרשמיות שלה שורטטו בקנה מידה גדול יותר; כלומר, הופיעו בהן יותר פיתולים ועיקולים של תווי השטח. זו הסיבה לכך שבמפות הפורטוגליות נמדד קו גבול ארוך יותר מאשר במפות הספרדיות.

חופים, מפרצים ודמיון עצמי

מנדלברוט, שעבד במעבדות חברת המחשבים IBM בארצות-הברית, הבין שיש כאן יותר מאשר קוריוז. בעצם, כמעט כל צורת נוף טבעית מתנהגת כך: ככל שמתבוננים בה יותר מקרוב, רואים בה עוד ועוד פיתולים, שקעים וגבשושיות. נחשוב לדוגמה על קו חוף מפורץ; למשל, בפירור דים של נורווגיה. כמו קו פרשת המים, גם כאן אין טעם לשאול מהו האורך הכולל של קו החוף. קו החוף הוא כולו מפרצים ומפרצונים בכל סקאלות הגודל, וככל שנמדוד ביחידת מידה קטנה יותר, נקבל אורך רב יותר. אבל אפשר לשאול שאלה אחרת: עד כמה קו החוף הוא מפורץ? למשל, במה קו החוף המפורץ מאוד של נורווגיה שונה

"קבוצת מנדלברוט", אולי הפרקטל המפורסם בעולם: נוסחה פשוטה, צורה מורכבת וסבוכה

דימוי גרפי ממוחשב: אלפרד פסיקה, ASAP/SPL



עמק המוות, קליפורניה. תכונת הדמיון העצמי של הפרקטלים מאפיינת לא רק קווי חוף, אלא גם פיתולי נחלים, מכתשים וצורות נוף אחרות

צילום: דובי טל

לדוגמה, לקו גיאומטרי יש רק אורך, כלומר מימד אחד, ולרצועת שטח יש גם אורך וגם רוחב, כלומר שני ממדים. אבל לקו החוף יש יותר מאשר סתם אורך. כפי שראינו, כאשר מנסים למדוד אותו, מקבלים אורך אינסופי.

מצד שני, כאשר הקו מפורץ מאוד, הוא מתפתל בצפיפות על פני רצועת שטח, ולכן כמעט אפשר לומר שיש לו גם רוחב. במלים אחרות, הקו מתנהג כמו משהו שיש לו מספר לא שלם של ממדים, כלומר שבר כלשהו בין 1 ל-2. מנדלברוט – שהלך בעקבות ההגדרה של מושג "המימד המטרי", שטבע המתמטיקאי הידוע פליקס האוסדורף (Hausdorff) – כינה איפוא את הצורות הללו בשם "פרקטלים", מהמלה הלטינית "פרקטוס", המציינת שבר. כפי שהוא הגדיר זאת, פרקטל הוא צורה שאינה קו ישר ואשר יש לה את תכונת הדמיון העצמי; כלומר, היא נשארת דומה לעצמה גם כאשר מתבוננים מקרוב בקטע קטן שלה.

ראשי כרובית, כלי דם ושערי מניות

כפי שהבין מנדלברוט, תכונת הדמיון העצמי של הפרקטלים מאפיינת לא רק קווי חוף ופרשות מים, אלא גם צורות ותופעות אחרות. לדוגמה, להסתעפות של מקורות נהר יש דמיון עצמי. ככל שמתקרבים להתבונן בנהר, רואים יובלים ופליגים קטנים יותר ויותר המתמזגים זה עם זה. גם פני השטח המחוּספסים של הר הם פרקטל בעל דמיון עצמי, שרואים בו עוד ועוד שקעוריות ובלאי טות ההולכות וקטנות. המכתשים שנוצרו מפגיעות מטאורים על פני הירח הם פרקטלים; על המכתשים הגדולים יש מכתשים קטנים ועליהם מכתשים קטנים מהם, וכן הלאה.

מהקו החלק יחסית של חוף הים בישראל?

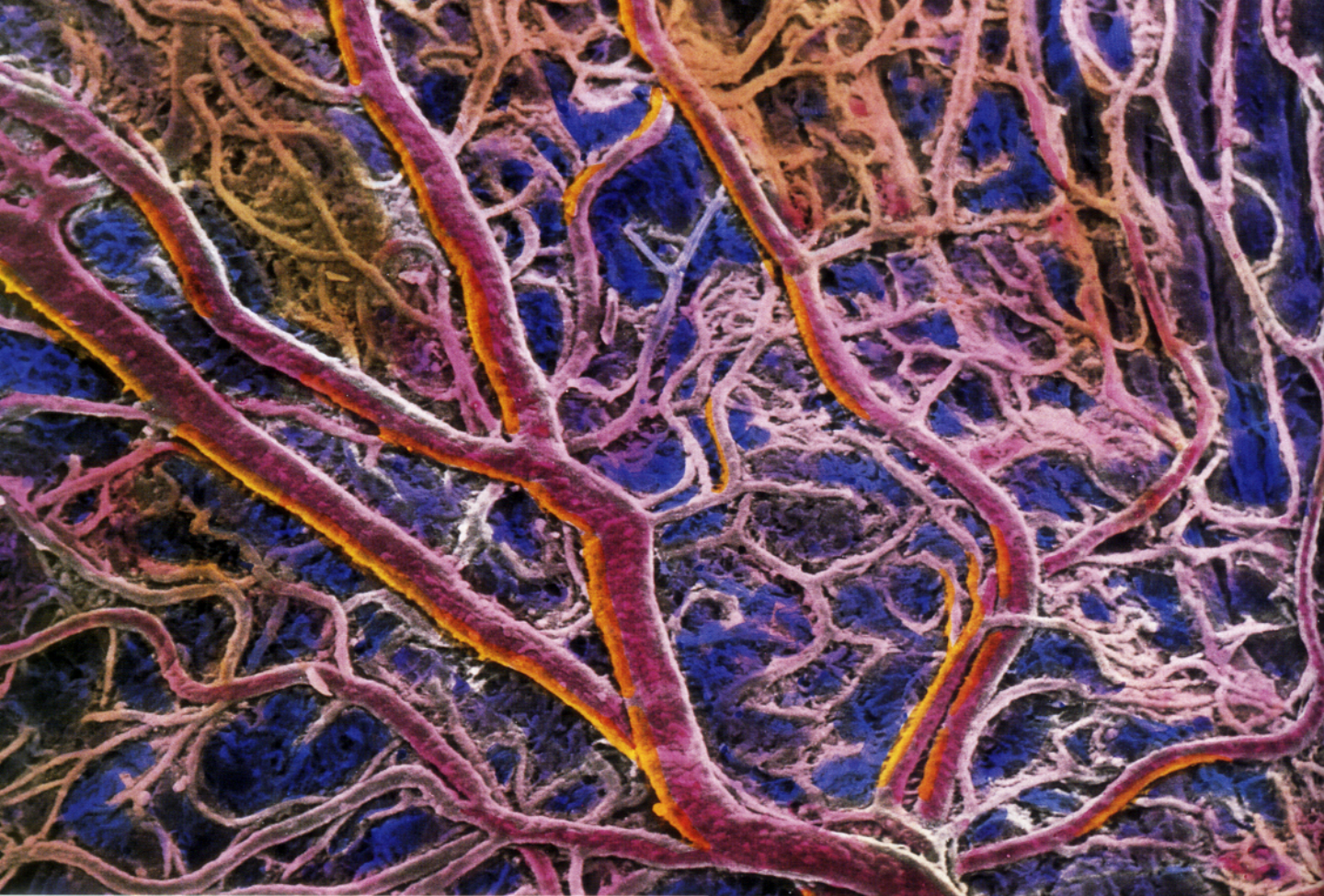
כפי שהבין מנדלברוט, ההבדל בין קווי החוף של נורווגיה ושל ישראל אינו תלוי בסקאלת הגודל שבה מתבוננים בחוף. אם מתבוננים בקו החוף של נורווגיה בתצלום לוויין, רואים קו מפותל ומפורץ מאוד. כשמתקרבים מעט – למשל, מגובה מטוס – רואים יותר פרטים, אבל הקו עדיין מפותל ומפורץ מאוד. כשמתקרבים עוד – עד גובה של 100 מטרים, או מטר ואפילו במבט מקרוב – רואים בכל פעם פיתולים ומפרצים חדשים, אבל הצורה הכללית של הקו נשארת אותה צורה. במבט מקרוב רואים פחות או יותר אותה מידה של פיתולים ומפרצים כמו במבט מרחוק. כאן טמון ההבדל בין שני קווי החוף: קו החוף הנורווגי מפותל מאוד גם במבט מרחוק וגם מקרוב, בעוד קו החוף של ישראל הוא קו חלק יחסית במבט מרחוק וגם מקרוב. כביכול, שני קווי החוף עשויים מתבנית אחת החוזרת על עצמה בכל סקאלות הגודל, והתבנית הזאת מפורצת בחוף הנורווגי יותר מאשר בחוף הישראלי.

מנדלברוט הבין שזו התכונה החשובה של קווי חוף ושל צורות טבעיות דומות. כל קטע של קו החוף דומה בצורתו לקו השלם. אם קו החוף השלם נראה מפורץ מאוד במבט מרחוק, אזי גם הקטעים שלו יהיו מפורצים מאוד במבט מקרוב. במלים אחרות, ככל שמתקרבים רואים עוד ועוד פרטים, אבל הצורה הכללית נשארת בעיני נה. התכונה הזו – כל חלק דומה לצורה השלמה – נקראת "דמיון עצמי". מן הצורות שהגיאומטריה המערבית המסורתית טיפלה בהן, רק הקו הישר הוא צורה שיש לה דמיון עצמי: אם מתבוננים בקטע קטן של קו ישר, הקטע גם הוא ישר. לעומת זאת, אם מתבוננים מקרוב בקטע קטן מאוד של מעגל או של אליפסה, אזי הקטע הזה איננו בעצמו מעגל או אליפסה, ובעצם הוא קרוב בצורתו לקטע ישר.

הגיאומטריה המערבית המסורתית אינה מכירה צורות בעלות דמיון עצמי שאינן קווים ישרים. לפיכך, כדי לתאר צורה כמו קו החוף, צריך להרחיב את המושגים שלה. הגיאומטריה הזו מדברת רק על צורות שמספר הממדים שלהן הוא מספר שלם ולא שבר.



סופת ברקים באריזונה. צורות פרקטליות לעולם אינן חוזרות על עצמן בדיוק, אבל תמיד אפשר למצוא בהן וריאציה של הצורה המקורית



למעלה: כלי דם בעין דימוי מחשב: פרופ' מוטה, אוניברסיטת רומא ASAP/SPL
מימין: מינרלים ומלחים בים המלח צילום: דובי טל

עננים הם פרקטלים. כאשר מתבוננים בהם מקרוב, רואים שהם עשויים מסבך של גושי אדים בתוך אוויר צלול. אולם הגושים עצמם אינם מלאים באופן רציף, אלא עשויים מאיים של גושי אדים בתוך אוויר צלול, ואלה עצמם עשויים מאיים קטנים יותר. למערבולות מים יש צורה פרקטלית – המערבולות הגדולות עשׂויות ממערבולות קטנות יותר ויותר. גם פתיתי שלג הם פרקטלים. השלוחות שלהם מתפצלות לשלוחות קטנות מהן, המתפצלות שוב ושוב באותה תבנית דמוית כוכב משושה, עד לרמת המולקולות הבודדות.

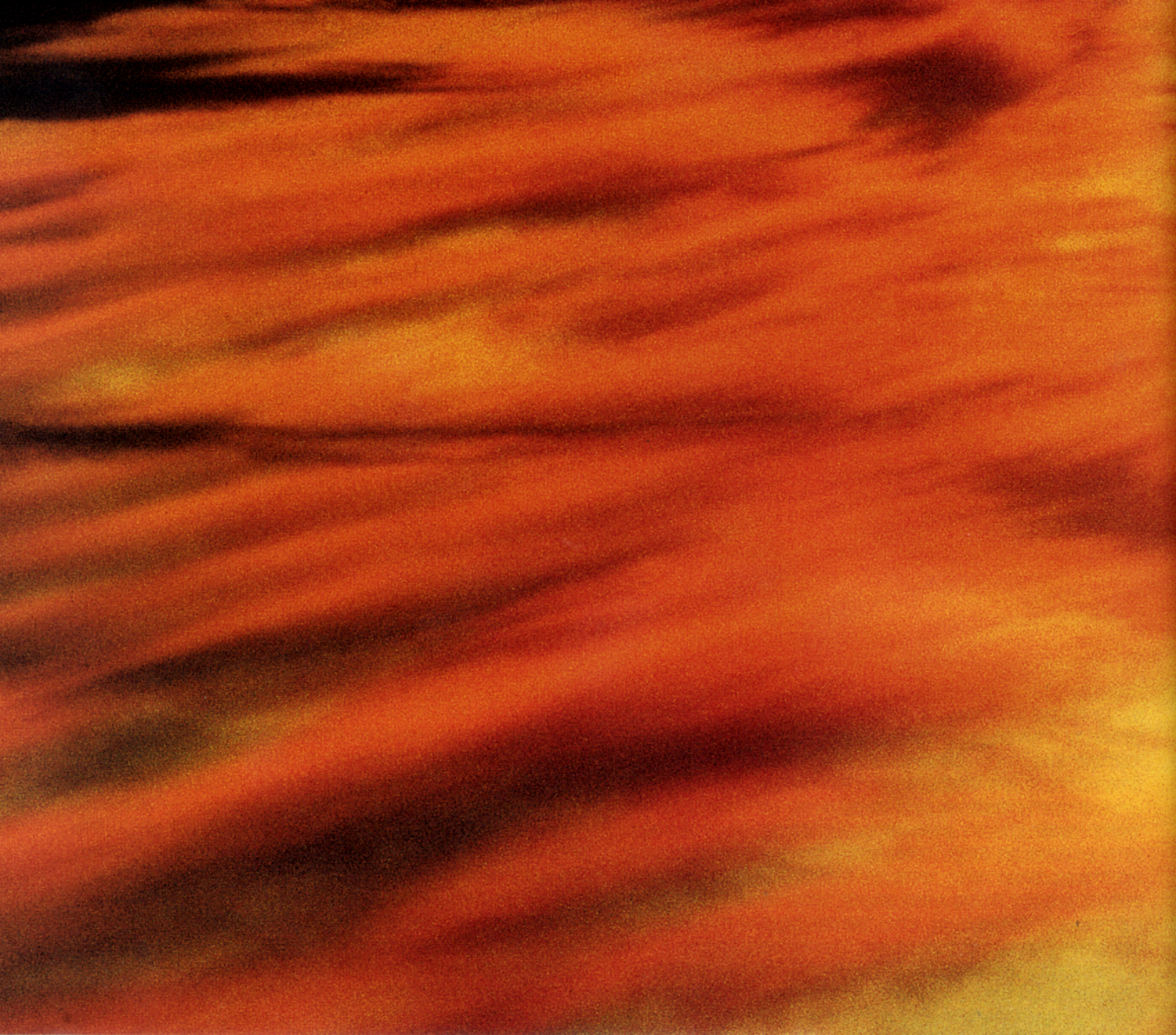
עצים הם פרקטלים, שבהם הגזע מסתעף לענפים שהם עצמם מסתעפים שוב ושוב. גם העלים והעלעלים שלהם הם פרקטלים, שהעורקים שלהם ממשיכים ומסתעפים ככל שמסתכלים בהם מקרוב. מערכת כלי הדם בגוף האדם היא פרקטל. העורקים הראשיים מתפצלים לעורקים קטנים ולעורקיקים, עד לנימים מיקרוסקופיים. גם הריאות הן פרקטלים. הן בנויות משקיות גדולות, המכילות שקיות קטנות יותר ויותר. ראשי כרובית הם פרקטלים; כל ראש כרובית עשוי מראשים קטנים יותר, וכל אחד מהם דומה בצורתו לראש הכרובית הגדול, ועשוי מראשים קטנים ממנו. בעצם, הטבע מלא פרקטלים.

אבל פרקטלים מופיעים לא רק בטבע, אלא גם במערכות שהן יצירת אנוש. מנדלברוט גילה, למשל, שהרעשים בקווי תמסורת אלקטרוניים מתאפיינים גם הם בדמיון עצמי: רעשים חזקים וממושכים, שביניהם רעשים קצרים יותר, ביניהם רעשים עוד יותר קצרים, וכן הלאה. אפילו התנודות של שערי המניות בבורסה הן פרקטליות. בבורסה יש תנודות עזות כמו גאות או מיתון, הנמשכות לעיתים כמה שנים; שערי המניות עולים ויורדים במהלכן בתנודות קטנות יותר של חודשים ושל שבועות, עד לתנודות יומיות.



הטבע מלא פרקטלים: העננים עשויים מגושי אדים שעשויים מגושי אדים, העצים מסתעפים שוב ושוב ודוגמאות הסלע חוזרות על עצמן





צילומים (ממין לשמאל): טי גלסון, סטודיו דאזי סטון





העין שלנו רגילה לראות צורות פרקטליות. למעלה: ספירלת מדרגות בוותיקן, רומא. בעמוד הבא: "ספירלה טבעית" בפארק ציון, ארצות-הברית. למטה: "פתית השלג" של קוך

ציורים: טל ברטוב (רומא); טל גליק (ארצות-הברית)

בקטע שבור עם משולש באמצעו. במונחים של מנדלברוט, העי- קומה הזו היא פרקטל בעל דמיון עצמי; משום שכאשר מגדילים כל קטע קטן בה, הוא זהה לצורה השלמה.

דוגמה דומה לגוף בעל צורה פרקטלית מבוססת על רעיון של מתמטיקאי פולני בשם וצלאב סירפינסקי (Sierpinsky). זוהי צורה דמוית ספוג הנוצרת מקובייה: מחלקים אותה ל-27 קוביות קטנות ומסלקים את המרכזית שבהן, ואז מחלקים כל אחת מהקוביות הנותרות ל-27 ומסלקים את המרכזית, וכן הלאה. בגוף שמתקבל בסופו של דבר יש הרבה מאוד חורים ונקבים בכל סקאלות הגודל, וכל חלק שלו נראה כמו גרסה מוקטנת של הצורה השלמה.

המתמטיקאים שחשבו על צורות כאלה לא יכלו לתאר ולחקור אותן בפירוט, משום שעל הנייר אפשר לצייר רק פרטים בודדים שלהן. אולם למנדלברוט היה כלי מחקר חדש: מחשב המצויד בצג גרפי. על צג המחשב אפשר לא רק לבנות בקלות צורות פרקטליות פשוטות כמו העקומה של קוך, אלא גם לחקור צורות מורכבות הרבה יותר. דוגמה לצורה כזו היא "קבוצת מנדלברוט", שהיא אולי הפרקטל המפורסם ביותר (ראו תצלום בעמ' 34). קבוצת מנדלברוט, הנוצרת באמצעות נוסחה פשוטה ביותר, מורכבת בעצמה וס- בוכה להפליא. אפשר להגדיל אותה ולשוטט בין הקטעים המוגד- לים, ואז לגלות עוד ועוד צורות חדשות ומרהיבות. הצורות הללו לעולם אינן חוזרות על עצמן בדיוק, אולם ככל שמתבוננים בהן בהגדלה חזקה יותר, תמיד חוזרים ומוצאים בתוכן וריאציה של הצורה המקורית.

לפרקטלים הממוחשבים יש היום שימושים בתחומים מדעיים וטכנולוגיים שונים. למעשה, הגיאומטריה הפרקטלית היא היום מושג בסיסי בחקר תופעות הכאוס; למשל, השינויים הלא-צפויים וההפככים של מזג האוויר ושל זרמי הים. לפרקטלים יש שימו- שים גם בטכנולוגיית התוכנה; לדוגמה, בשיטות מתקדמות של דחיסת קובצי תמונות. שימוש מעניין במיוחד של הפרקטלים הוא בתחום הגרפיקה הממוחשבת. באמצעות תוכנה המציירת תמונות על פי נוסחאות פרקטליות, שמשולבים בהן גורמים אקראיים, אפשר ליצור תמונות של נופים, חופים ים, הרים ועמקים, עננים וסערות גשם, נהרות וצמחים ואף כוכבי לכת. יתרון של התמונות הנוצרות בשיטות כאלה הוא בכך שהן נותנות לעין הצופה תחושה "טבעית" יותר, בעוד שמשטחים הנוצרים בשיטות אחרות נראים חלקים ומלאכותיים.

מן העובדה שגרפיקה פרקטלית נותנת לעין תחושה של טבעיות ניתן אולי להבין שהעין שלנו רגילה לראות צורות פרקטליות בטבע. גם אם זה נכון, עד שנות השבעים לא היו צורות כאלה חלק

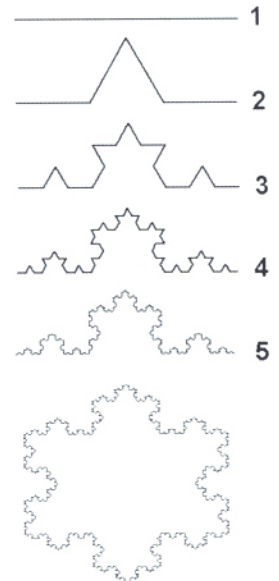
שגם הן מורכבות מתנוודות של שעות ולפעמים של דקות. כפי שמ- נדלברוט מצא, בכל סקאלות הגודל האלה יש אותה מידה של טלט- לות ושל שינויי מגמה, ולכן גם לגרף של תנוודות השערים בבורסה יש דמיון עצמי.

מפלצות, פתיתי שלג ומזג אוויר

כאשר למדתי פיזיקה באוניברסיטה בשנות השבעים, נהגו המר- צים לומר שלמתמטיקאים יש כל מיני המצאות מוזרות; מעין "מפלצות", שקיומן מנוגד לאינטואיציות שלנו. מפלצות כאלה הן, למשל, קווים שאין בהם שום קטע חלק, שכל נקודה שלהם היא נקודת חוד, שבה משתנה כיוון הקו באופן לא רציף. כמה מפלצות כאלה, שהיום אפשר לראות אותן כדוגמאות מוקדמות של פרקט- לים, הומצאו על ידי מתמטיקאים בתחילת המאה ה-20.

פרקטל כזה הוא "פתית השלג", שהמציאה המתמטיקאית אלזה קוך (Koch) בשנת 1904 (ראו איור מי- מין). פתית השלג של קוך נבנה באופן הבא: לוקחים קו ישר, מוח- קים את השליש האמצעי שלו, ובמ- קומו בונים משולש שווה צלעות ללא הבסיס. כעת לוקחים את ארבעת הקטעים הישרים שנוצרו, מוחקים את השליש האמצעי של כל אחד מהם, ובמקומו בונים משולש שווה צלעות. ממשיכים כך שוב ושוב עד אינסוף, והקו שמתקבל הוא העקומה של קוך. אפשר לצרף שלוש עקומות כאלה יחדיו, ואז מתקבלת צורה של מעין מגן דוד עם הרבה מאוד בליטות ומפרצים, המזכיר פתית שלג.

העקומה של קוך מורכבת מנקודות חוד בלבד. בעצם, אין בה שום קטע ישר, משום שקטע כזה יוחלף מיד





ויות אלים, דמויות מיתיות, חיות ובני אדם בגובה של כמה מטרים, ביניהן דמויות שגובהן עשרות סנטימטרים, ודמויות קטנות יותר ויותר עד לגודל של כסנטימטר. המשטח החיצוני המתקבל מכל השקעים והבליטות והגילופים האלה מפותל ומורכב מאוד. כמו הפרקטלים של מנדלברוט, גם כאן חוזרות על עצמן אותן צורות בסיסיות בסקאלות גודל קטנות והולכות, וגם כאן רואים עוד ועוד פרטים ככל שמתקרבים.

דוגמה נוספת אפשר לראות במקדשים של שושלת ההויסאלה בשתי העיירות השכנות האלביד (Halebid) ובלור (Belur) שבקרנתקה (Karnataka). במבט מלמעלה, יוצרים הקירות החיצוניים של המקדש שים צורות דמויות כוכב, אבל אלה אינם כוכבים פשוטים. כל בליטה של הכוכב הראשי עשויה מבליטות קטנות ממנה, וביניהן עוד ועוד בליטות קטנות וקטנטנות. בסופו של דבר, מתקבל קו שנשבר כמעט בכל מקום, עם חודים גדולים וקטנים, וקטנים יותר, המזכירים מאוד את פתית השלג של קוך. הקירות האלה מעוטרים בצפיפות בשורות אופקיות של תבליטים, המקיפות את כל המקדש, והפרטים שלהן מגולפים בממדים קטנים והולכים עד למילימטרים. כל אלה יוצרים משטח חיצוני שכולו בליטות ושקעים וסקאלות הגודל, והוא בעצם יותר ממשטח דו-ממדי פשוט כמו מישור חלק, אלא מין גוף מפורץ ומחורר, בעל איכות ספוגית כמו הקובייה של סירפינסקי.

דמיון עצמי אפשר למצוא לא רק באיכות החיצונית של משטחי המקדשים, אלא גם במבנה שלהם. מקדש הודי גדול משתרע על מתחם שאורכו ורוחבו עשויים להגיע לכמה מאות מטרים. אבל שלא כמו הקתדרלה הנוצרית או המסגד המוסלמי, שגם הם עשויים להגיע לממדים כאלה, המקדש ההודי אינו מאורגן כיחידה מרחבית אחידה. הוא מחולק למספר גדול של מתחמי משנה, המחולקים בעצמם לתת-מתחמים הולכים וקטנים, ובהם מבנים שגם הם נחלקים למקדשים גדולים המכילים מקדשים קטנים, וקטנים יותר. במבט ראשון, כל המתחמים והמבנים האלה נראים מגובבים זה בצד זה וזה בתוך זה בלי שום תבנית וסדר. ואכן, הם לא נבנו על פי תוכנית ערוכה מראש אלא במשך כמה מאות שנים, וכל תקופה ניצלה את החללים הריקים שבין המבנים של קודמותיה,

ממאגר הרעיונות המקובל במדע המערבי. אפילו המרצים במחלקה לפיזיקה שדיברו על המפלצות המתמטיות אמרו לנו, התלמידים, שכפיזיקאים לעתיד איננו צריכים לדאוג יותר מדי בעניינן. המתמטיקאים יכולים לתאר לעצמם צורות כאלה, עם כל מיני תכונות שונות ומשונות; אבל הפיזיקאים עוסקים בטבע, ובטבע אין מפלצות: כל העקומות רציפות וחלקות. מנדלברוט וחוקרי הפרקטלים אומרים בעצם את ההיפך. לטענתם, עקומות חלקות ורציפות קיימות רק בדמיוננו. למעשה, הם טוענים, בטבע הכל מלא פרקטלים. איך זה יכול להיות? עצים, עלים, מכתשים, קווי חוף ועננים אינם דברים חדשים. בני אדם ראו אותם מאז ומעולם, ובכל זאת, עד שנות השבעים איש לא הבחין במבנה הפרקטלי שלהם. נראה שכדי לראות משהו, לא מספיק שהוא יהיה מול העיניים, צריך גם שהמושג המתאים יהיה בראש. כל עוד אנשים לא חשבו במונחים של פרקטלים, הם לא ראו פרקטלים. רק באחרונה, בעקבות מה שראינו על צג המחשב, אנו יכולים לחזור ולראות גם את העצים והעננים במבט חדש, ולהבחין בתכונת הדמיון העצמי שלהם. אבל ייתכן שהדברים האלה אמורים רק בצורת החשיבה ובמונחים הגיאומטריים של המדע המערבי המסורתי. אם בוחנים את האמנות והמיתוסים שהתפתחו בהודו, אפשר לראות שהם בנויים על פי מתכונת הקרובה מאוד ברוחה למושגים המתמטיים החדשים של פרקטלים ודמיון עצמי.

המקדש ההודי, וישנו ובראהמה

המחשה לאופי הפרקטלי של האמנות ההודית אפשר לקבל כאשר מתקרבים לאחד המקדשים הגדולים בדרום הודו; למשל מקדש האלה מינאקשי במאדוראי (Madurai) שבמדינת טאמיל נאדו. כבר ממרחק אפשר להבחין בגופוראמים – אותם מגדלי כניסה שגובהם כמה עשרות מטרים – מעל לשערים בארבע החומות המקיפות את המקדש. אבל קווי המיתאר של המגדלים האלה נראים מעט מטורשטים. כשמתקרבים אליהם אפשר להבחין שהם מורכבים מבליטות ומשקעים גדולים, ומקרוב יותר רואים בליטות ושקעים נוספים, עם אותה צורה אבל קטנים יותר, וביניהם בליטות ושקעים קטנים עוד יותר. המגדלים מעוטרים בשפע עצום של תבליטי דמ-

מגדל כניסה למקדש בקומפלקס
המקדשים סרינגאם
שבטירוצ'ירפאלי, דרום הודו.
פרקטל מעשה ידי אדם,
המחולק למספר גדול של
מתחמי משנה, המחולקים
בעצמם לתת-מתחמים
צילום: שמעון לב





ובכל זאת, יש סדר קפדני בארגון המתחמים והמבנים האלה, המ' תבטא בעובדה שלכולם אותו מבנה בסיסי. באמצע המתחם המ' לבני יש מתחם פנימי טהור וקדוש יותר, וסביבו מרחב פתוח או מסדרון המאפשר להקיף אותו מסביב. המתחם הפנימי ושטחים הנוגסים במרחב הפתוח שסביבו עשויים להיות מחולקים עוד ועוד, אבל גם בחלוקה הזו נשמר אותו מבנה: שטח פנימי קדוש וס' ביבו מרחב הקפה. במלים אחרות, אותה תבנית חוזרת על עצמה, מהמרחבים שבין החומות החיצוניות, דרך המתחמים ותת-המתח' מים והמבנים, ובתוכם עוד מבנים וחדרים וחדרונים קטנים מהם, עד לכוכים קטנטנים סביב פסל בודד.

התבנית הזו לא רק מתארת צורה איכותית של ארגון המרחב, אלא גם קובעת את המידות שלו. למעשה, כל המתחמים והמבנים במקדש בנויים על פי אותם יחסים גיאומטריים מדויקים של אר' כיטקטורת הקודש ההודית. היחסים האלה עשויים להתבטא בכל סקאלות הגודל – מהמקדש הגדול במאדוריי, שאורך צלעו כ-250 מטרים, ועד למקדשון ברונזה בגודל של כמה סנטימטרים. בכל סקאלות הגודל האלה, המקדש כשר לפולחן אם המידות שלו מק' יימות ביניהן את היחסים הגיאומטריים הנכונים.

המקדש ההודי בנוי איפוא במתכונת של פרקטל גדול, כאשר אותה תבנית של צורות בסיסיות ויחסים גיאומטריים חוזרת על עצמה ומכילה את עצמה בסקאלות גודל הולכות וקטנות. לפעמים, הדמיון העצמי בין הסקאלות השונות מתבטא אפילו ברמה הסמ' לית המפורשת; למשל, במקדש בהאליד שבו מיוצגים שלושת האלים הראשיים של הפנתיאון ההודי. כשנכנסים לחלל המקדש, רואים כניסות לשלושה חדרים גדולים: השמאלי מוקדש לווישנו, הימני לבראהמה והקדמי לשייווה. הכניסה הקדמית מובילה לחדר ובו שלושה חללים בגודל בינוני: השמאלי של וישנו, הימני של בר' האמה והקדמי של שייווה. החלל הקדמי הוא כמובן החשוב ביותר, וגם בו יש שלוש נישות קטנות לפסלים: השמאלית של וישנו, הימ' נית של בראהמה והקדמית של שייווה.

לגלול נפשות, מחזורים וסיפורים

תבניות דמויות פרקטלים אפשר למצוא גם בתפיסת הזמן ההודי. בניגוד לזמן החד-פעמי של הדתות המערביות, המתמשך כבי' כול בקו ישר של כמה אלפי שנים מברית העולם ועד קיצו, הזמן ההודי דומה למערכת מורכבת של מעגלים ומחזורים המכילים זה את זה בסקאלות גדולות והולכות. מחזור היום והלילה בחיי האדם מורכב מעשרות אלפי מחזורי נשימה ונשיפה, וממיליארדים רבים של תנודות שבהן התודעה מתעוררת ודועכת. אבל המחזור היומי עצמו הוא רק חולייה אחת בשרשרת עונות השנה, שבהן הטבע כולו עובר משפע למחסור, וחוזר חלילה. גם שנות חיי האדם הן חלק משרשרת מחזורית של לידות ומיתות, שבהן הנפש מתגלגלת מגוף אחד לאחר.

מחזור הלידה והמוות של לגלול הנפשות הוא עצמו חלק ממחזור גדול יותר, ה"יוגה" שנמשכת כמה מאות אלפי שנים. ארבע יוגות הן מאהאיוגה, כלומר "יוגה גדולה". 72 מאהאיוגות הן מאנוואנטאקה אחת, שבסופה העולם נשטף במבול, ו-14 מאנוואנטארות הן קאלפה אחת, הנמשכת כארבעה מיליארד שנים. בסוף הקאלפה חוזר העולם לתווה ובוהו, נשאר כך פרק זמן דומה הנקרא פראלאיה, ואז הוא חוזר ונברא מחדש. קאלפה ופראלאיה הן היום והלילה של האל הבורא בראהמה. לאחר שבראהמה מגיע לגיל של מאה שנים, גם הוא מת; ואז הוא נולד מחדש אחרי עוד מאה שנות בראהמה, וכן הלאה וכן הלאה במחזורים גדלים והולכים של בריאה ויחדלון ובריאה מחדש עד אין קץ.

תפיסת הזמן ההודית מבטאת איפוא את תכונת הדמיון העצמי של פרקטלים, וגם הסיפורים הממלאים את הזמן המיתי ההודי הם בעלי אופי פרקטלי: ככל שבוחנים אותם ביתר פירוט, יש בהם עוד ועוד סיפורים ועלילות משנה. אפשר, למשל, למצוא את כל סיפור המסגרת של אפוס ענק כמו המהאבהאנטאקה או הקאמיאנה, מת'

חילתו ועד סופו, בשלושים עמודים של חוברת קומיקס. יש גם ספרונים עם גרסאות קצרות וגרסאות ארוכות יותר ויותר, עד לטי' קסטים המסורתיים של עשרות ומאות אלפי שורות. כל הגרסאות האלה מספרות אותה עלילה, במידה גדלה והולכת של פירוט, וכל פרט בסיפור יכול להיפרש לעלילות משנה, שבהן מופיעים עוד ועוד סיפורים. בסופו של דבר, גם הגרסה הכתובה המסורתית אינה מהווה פירוט מלא וסופי של העלילה, משום שמקדשים או אלים מקומיים עשויים להיות קשורים בסיפורים משלהם, המשתלבים בתורם בתוך אחת האפיזודות של האפוס הגדול; וגם להם אפשר למצוא עוד גרסאות ועוד עלילות משנה.

קרישנה, לאקשמי וקומבינות עירוניות

האפוסים הגדולים הם עצמם חלק קטן בלבד מהמארג הסבוך של סיפורי המיתולוגיה ההודית, שבה לכל אל ולכל מקדש ופסל, לכל הר, נהר ועץ קדוש יש אינספור סיפורים, המשתלבים זה בזה ומור' בילים זה אל זה, ולפעמים גם סותרים זה את זה, וכל פרט בהם מוביל לעוד ועוד פרטים וסיפורים אחרים כאשר בוחנים אותו מק' רוב.

במארג הזה, גם דמויות האלים מכילות זו את זו. לעיתים, הם מתגלגלים זה בזה, לפעמים זה לחלק מזה, ולפעמים אף לחלק מעצמם. לדוגמה, במהלך ההיסטוריה מופיע האל וישנו בעולם בעשר דמויות – "אוואטארים" או גלגולים. אחד מהם הוא האל קרישנה, הנוצר משערה מזקנו של וישנו. קרישנה הוא חלק מוויש' נו, ויחד עם זאת הוא גם וישנו בעצמו. לפיכך, על אף שקרישנה שוכן בתוך העולם, העולם כולו שוכן בתוך וישנו ולכן גם בתוך קרישנה. בפרק השיא של הבהאגודג'טה, שהיא חלק מן המהאב' האראטה, יש אכן תיאור של קרישנה המציג את דמותו האלוהית כווישנו בפני הלוחם ארג'ונה, ואז הוא מראה לו את חזיון היקום כולו בתוך גופו. בכיכול, החלק מכיל את השלם.

המיתולוגיה ההודית מלאה דוגמאות כאלה. במקדש של קומב' קונם (Kumbakonam) בטאמיל נאדו יש סדרת ציורים המתארת את האל שייווה, שהופיע בדמות צייד צעיר לאחר המבול ואז התאחד עם דמות הלינגאם, שהוא איבר המין שלו. ואפשר למצוא פסלים המתארים יחס הפוך: שייווה שוכן בדמותו השלמה בתוך הלינגאם. הלינגאם מהווה איפוא חלק משייווה, את שייווה עצמו וגם מרחב המכיל את שייווה בתוכו. גם האלות – שהן בעצם אלה אחת הכוללת את כולן, ועם זאת מהווה האלה האחת את כל אחת מהן בנפרד – משתתפות במשחק הזה. האלה לאקשמי היא בת זוגו של וישנו, ובדרך כלל היא יושבת בצידו; אבל היא נמצאת כולה גם על לוח ליבו. פארווטי, אשתו של שייווה, היא גם האנרגיה הנשית המ' הווה מחצית מגופו. ודורגה, האלה הנוקמת, מורכבת מאיחוד הכר' חות של כל האלים הגברים, וכדי להשמיד את כוחות הרוע היא יוצאת מתוך גוף עצמה בדמותה האפלה של קאלי.

האלים ההודיים חודרים, אם כן, זה לתוך זה ומכילים זה את זה, כמו הסיפורים והפסלים המתארים את עלילותיהם, וכמו חללי המ' קדשים שבהם מתבצע פולחנם. ככל שמתבוננים מקרוב יותר רואים עוד ועוד פרטים, והתכונה הזו מאפיינת אולי לא רק את הר' ויית המקדשים והפולחן בהודו, אלא גם משהו כללי יותר בתחושה שנותנת הודו למטייל. במבט מרחוק, הרחוב ההודי הוא ערבוביה גועשת של אנשים, בעלי חיים וכלי רכב מכל הסוגים והגדלים, הד' חוסים יחדיו בצפיפות שלא תיאמן וברעש מחירש אוזניים. אבל ההמולה הזו אינה אוסף חסר זהות של אנשים המנסים להגיע במ' הירות ממקום למקום. במבט מקרוב, אפשר לראות שכמעט כל האנשים ברחוב מקיימים ביניהם ללא הרף פעילויות, אינטראקציות וקומבינות שונות ומשונות, החולפות זו בצד זו וזו דרך זו כמעט ללא הפרעה. במובן מסוים, הרחוב כולו הוא ישות חיה ופועמת, מורבת ראשים וזרועות כמו פסלי האלים. אבל ישות הרחוב הזו מורכבת ממתחמים ותת-מתחמים עם חיים משלהם; למשל, פינה של כעשרה סוחרים בשמים שכולם בני אותה קאסטת, ועם זאת כל אחד מהם יושב בדוכן משלו ומנהל ממנו את מארג העסקים וה'

מקדש האלה מינאקשי
במדורי, דרום הודו. כמו
הפרקטלים של מנדלברוט, גם
כאן חוזרות על עצמן אותן
צורות בסיסיות בסקאלות גודל
קטנות והולכות
צילום: הראל סטנטון



מחשבים, אלים ומסיבות טראנס

פתחנו בצגי המחשבים, שעליהם נראו הפרקטלים לראשונה, וסיימנו בצלמיות שלהם, המזכירות את תרבות הצלמים והצלמיות היהודית. ניתן לחשוב על איזו קרבה בין העולמות החדשים של מושגים וחוויות, המתגלים היום באמצעות הטכנולוגיה הממוחשבת, לבין דרכי חשיבה ודימויים שהתפתחו בהודו. על כך יכולות להעיד לא רק הפריחה הגדולה כיום של תעשיית התוכנה היהודית, אלא גם העובדה שרבים מאוד מהאנשים אשר חוללו את מהפכת המחשוב האישי והאינטרנט, משנות השבעים ואילך, היו נתונים להשפעות הודיות באמצעות תנועת הניו־אייג', ביקרו בהודו או נטו אחרי תורות מיסטיות שמקורן בהודו.

אם אכן יש דמיון בין עקרונות הגיאומטריה הפרקטלית לבין מאפיינים בולטים של התרבות היהודית, כפי שניסינו להציג בדוגמאות שהובאו כאן, אזי אפשר אולי לראות אותו כחלק ממארג רחב יותר של קשרים וחיבורים אפשריים בין עולם המחשבים והמידע של ימינו לבין דרכי המחשבה של הודו המסורתית. אפשר גם לנסות לחפש סימנים לקשרים כאלה בדימויים וביצירות של תרבות הצעירים כיום. הצעירים האלה גדלו בסביבה עתירת מחשבים ותקשורת, אשר נוצרה באמצעים של הטכנולוגיה המערבית המודרנית. אולם עולם הרעיונות המערבי המסורתי, שעיצב את החינוך שקיבלו, מתקשה להתמודד עם שפע האפשרויות, ההקשרים ונקודות המבט שסביבה כזו מציעה. ייתכן שאחד הגורמים המניעים את ההתעניינות הפעילה שלהם בהודו, כפי שהיא מתבטאת בנסיעות להודו וביבוא התרבותי והחומרי של מוצרים וסמלים הודיים, הוא השאיפה למצוא מאגרים נוספים של רעיונות ודרכי חשיבה, שיאפשרו להבין ולהתמודד טוב יותר עם סביבה עתירת מידע וקשרים, פרטים וסיפורים, דמויות וצלמיות.

חיבור כזה בין מחשבים והודו אפשר למצוא בביטויים היצירתיים של קהילת מסיבות הטראנס, הנערכות ברחבי העולם ובישראל (ראו "מסע אחר" 90). מקורותיו של הטראנס הפסיכדלי בחופי גואה (Goa) שבהודו, ומשם לקוחים רוב הדימויים והסמלים שלו. אבל מוסיקת הטראנס והאפקטים הוויזואליים הנלווים אליה נוצרים באמצעים מתקדמים של טכנולוגיה ממוחשבת. אולי אין זה מקרה, ששניים מהמוטיבים החזותיים הבולטים ביותר בציורים של עטיפות הדיסקים, הבדים והבגדים הצבעוניים של מסיבות הטראנס הם דמויות של אלים הודיים, ובציורים דוגמאות הלקוחות מן הגיאומטריה של הפרקטלים. זהו אולי אחד הביטויים החזותיים הברורים ביותר לקרבה שיש כולה התרבות של זמננו למצוא בין שתי מערכות המושגים והצורות, אשר באו לכאורה ממקורות כה שונים. מצד אחד, המחקר המתמטי המערבי של צורות פרקטליות וגיאומטריה ממוחשבת; ומצד האחר, עולם הדימויים והמושגים של האמנות, המיתוסים וחוויות החיים היהודית. ייתכן איפוא שההבחנה בקרבה כזו עשויה לתרום להבנה לא רק של הפרקטלים מצד אחד ושל הודו מהצד האחר, אלא גם של האופן שבו נפגשות מערכות כאלה בעולם המזרחי והמערבי של תרבות המידע המתהווה כיום.

תודת המערכת לפרופ' גדעון שורץ מהחוג לסטטיסטיקה באוניברסיטה העברית על הערותיו המועילות.



שדה בגליל, צילום אוויר. ככל שמתבוננים יותר מקרוב כמעט בכל צורת נוף, רואים בה עוד ועוד פיתולים, שקעים וגבשושיות

צילום: דובי טל

מכרים שלו.

ברשת הסבוכה הזו של קשרים אנושיים, כל מפגש מקרי, כל הצצה לפינה צדדית או היענות להצעה חסרת חשיבות לכאורה, יכולים להוביל למרחבים שלמים של חוויות ומאורעות מדהימים ומופלאים. שום סיפור אינו סגור עד הסוף, ואי־אפשר לקבל שום אמירה כפשוטה: מאחורי כל אחד מהם מסתתרים עוד ועוד סיפורים והולכים ומסתבכים ומתפרטים ככל שמנסים לברר אותם לא־שורם. כביכול, כל אחד מהם לא רק עומד בפני עצמו, אלא גם מהווה מעין צלמית (אייקון), בדומה לצלמיות המופיעות על צג המחשב: אפשר לבחור בו, ואז הוא נפתח ומגלה עולם חזותי שלם, שבתוכו אפשר למצוא עוד צלמיות שיוליכו לעוד ועוד עולמות.

התבנית הפרקטלית הזו – ריבוי עצום של עולמות בתוך עולמות, של מציאות שלעולם איננה נגמרת ושתמיד אפשר להתבונן בה יותר ויותר מקרוב ולראות עוד ועוד פרטים וסיפורים – היא אולי מה שמקנה לנסיעה בהודו את האופי המיוחד, האופייני לה יותר מאשר להרבה ארצות אחרות; של חריגה מהמציאות המוכרת, המתחלפת בתחושה של גלישה ומשחק בסבך של ריבוי קשרים ואפשרויות, שלעולם אינן נוחות על קרקע מוצקה וסופית.



ד"ר יואב בן־דב – מוזיקאי בהכשרתו, מלמד היסטוריה ופילוסופיה של המדעים באוניברסיטת תל־אביב. ספרו "תורת הקוואנטים – מציאות ומסתורין" ראה אור בשנת 1997 בהוצאת דביר. עוסק גם בחינוך וב"הורות המדעים, בקריאה בקליפ טארוט, בתרבות האינטרנט ועוד