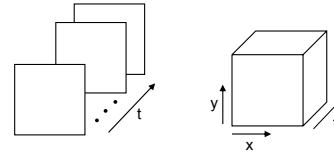


Example Questions - Fourier Transform

שאלה מספר 4 (2004-5)

נגדיר 'סרט' כסדרה של 256 תמונות דרגות אפור, כל תמונה בגודל 256×256 אפשר להתייחס לסרט כמטריצה תלת-מימדית $256 \times 256 \times 256$.



כדי לבצע אנליזה של הסרט, מבצעים טרנספורם פורייה תלת-מימדי.

א. הגדר את פונקציית הבסיס $B_{u,v,w}$ של פורייה תלת-מימדי עבור סרט. ניתן לבחור ייצוג קומפלקסי או ייצוג ממשי בדומה לתרגיל שניתן בכיתה.

ב. עבור סרט $f(x,y,t)$ תן נוסחת טרנספורם הפורייה התלת-מימדי עבור $F(u,v,w)$ ואת נוסחת טרנספורם הפורייה ההפוך.

ג. בסרט $f(x,y,t)$ מצולם מגדלור עם אור מהבהב בקצב קבוע. תאר כיצד ניתן לגלות בתחום התדר, מהו קצב ההבהוב (יחסית לאורך הסרט).

ד. רוצים "למתוח" את הסרט ל-512 תמונות (כל תמונה בגודל המקורי). תן אלגוריתם לעשות זאת.

Question:

f is a grayscale image of size $N \times N$
 F is the Fourier transform of f .

G is a $2N \times 2N$ transform obtained by inserting 0 between every value in F :

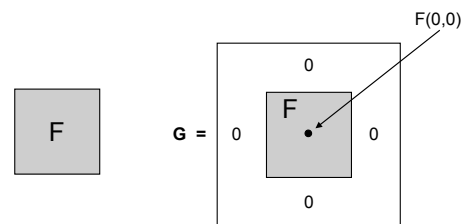
$$G = \begin{bmatrix} F_{00} & 0 & F_{10} & 0 & F_{20} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ F_{01} & 0 & F_{11} & 0 & F_{21} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ F_{02} & 0 & F_{12} & 0 & F_{22} & 0 & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

What is the image g whose Fourier transform is G ?
 (i.e. what is the inverse transform of G ?)

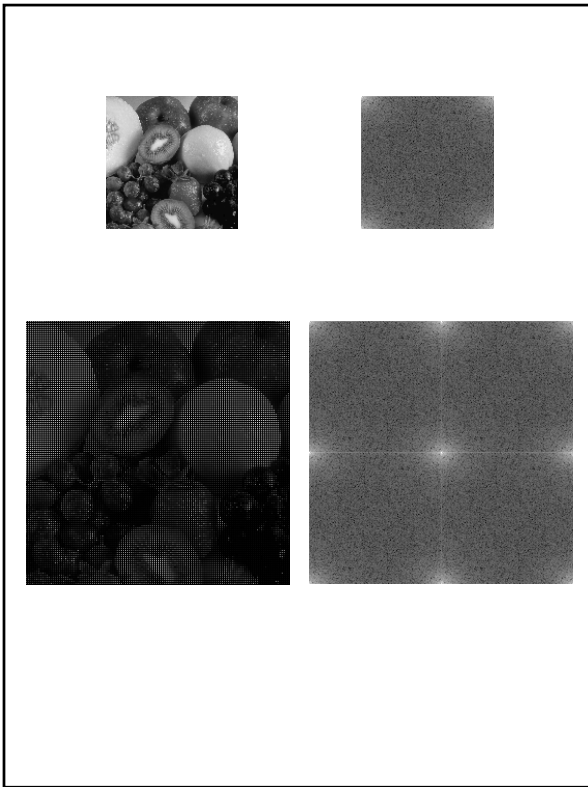
Question:

f is a grayscale image of size $N \times N$
 F is the Fourier transform of f .

G is a $2N \times 2N$ transform obtained by surrounding F with zeroes:



What is the image g whose Fourier transform is G ?
 (i.e. what is the inverse transform of G ?)



3. א. מה טרנספורם הפורייה של תמונה בגודל 128x128 אשר נתונה ע"י:

$$f(x,y) = \text{Gaussian}(x) = e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}$$

ב. מה טרנספורם הפורייה של תמונה בגודל 128x128 אשר נתונה ע"י:

$$f(x,y) = \delta(y)$$

כאשר $\delta(y)$ היא פונקצית דלתא השווה ל-1 עבור $y=0$ ושווה ל-0 בכל מקום אחר.

4. א. נתונה תמונת דרגות אפור f המוגדרת בתחום $[-\frac{M}{2}, \frac{M}{2}]$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \text{Gaussian}(x) & \text{for } |y| < \frac{M}{4} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

כיצד יראה טרנספורם הפורייה של f ! הסבר!

ב. טרנספורם פורייה של גאוסין הוא גאוסין ברוחב שונה. ניתן למצוא σ^2 של גאוסין כך שטרנספורם הפורייה יהיה בדיוק אותו גאוסין.

מצא תמונה f נוספת דו-מימדית אשר ספקטרום הפורייה שלה זהה לתמונה המקורית עד כדי הכפלה בקבוע. (תמונה לא טריוויאלית כגון תמונת האפס).

5. א. מה טרנספורם הפורייה של התמונה החד מימדית:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{if } |x| < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ב. מה טרנספורם הפורייה של התמונה הדו-מימדית בגודל $N \times N$ הבאה ($N \geq 9$):

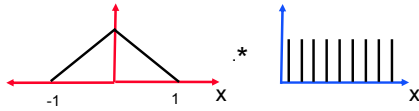
	N/3	N/3	N/3
N/3	000... 000...	111... 111...	000... 000...
N/3	111... 111...	222... 222...	111... 111...
N/3	000... 000...	111... 111...	000... 000...

א. נתונה תמונה חד מימדית באורך 128 של 64 הלמים (comb) מאופנים לינארית כפי שמוצג בתמונה. מה טרנספורם הפורייה של התמונה? הסבר תשובתך!

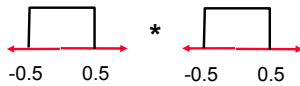
Answer Question 3

2 sections – Section א 16 points, Section ב 17 points.

א The input image is a pixel-by-pixel multiplication of a 'pyramid' and a comb:



The 'pyramid' is a convolution of 2 'rect's :



Thus we have that the input image = (rect * rect) * comb

Following the Convolution theorem, the Fourier transform of the image equals:

$$(F(\text{rect}) \cdot F(\text{rect})) \cdot F(\text{comb})$$

The Fourier transform of rect is a sinc function, the transform of the comb is a comb with 2 peaks (per cycle) at distance $N/2$ of each other (this was proven in class). Thus the transform of the image is a convolution of sinc^2 with the 2-peak comb, giving:



4. א. נגדיר: $r^2 = x^2 + y^2$ - מרחק ריבועי מהראשית

$$G(x, y) = e^{-\pi r^2} \quad \text{פונקציית גאוסיאן}$$

תאר איכותית כיצד ייראה ספקטרום פורייה של התמונות הבאות:

$$I_1(x, y) = \begin{cases} G(x, y) & \text{if } r^2 > 10 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$I_2(x, y) = \begin{cases} G(x, y) & \text{if } r^2 > 10 \\ G(x, y) - 0.5 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Question:

F is the Fourier Transform of a 2 dimensional image. Prove that :

$$|F(0,0)| \geq |F(u,v)| \quad \text{for all } u,v$$

Answer:

$$\begin{aligned} |F(u)| &= \left| \sum_x f(x) e^{\frac{2\pi i u x}{n}} \right| \leq \\ & \sum_x \left| f(x) \right| \left| e^{\frac{2\pi i u x}{n}} \right| = \\ & \sum_x f(x) \cdot 1 = F(0) \end{aligned}$$

Question:

Parseval's Theorem:

$$\sum_x \sum_y |f(x,y)|^2 = \sum_x \sum_y |F(u,v)|^2$$

F is the Fourier Transform of a 2 dimensional image f of size $N \times M$. How can the Variance (Contrast) of the image f be obtained from F? (Use Parseval's Theorem).

$$\text{Var}\{f(x,y)\} = \frac{1}{NM} \sum_x \sum_y (f(x,y) - \bar{f})^2$$

Question:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_x (f(x) - \bar{f})^2 &= \frac{1}{N} \sum_x (f^2(x) - 2\bar{f} \cdot f(x) + \bar{f}^2) \\ &= \frac{1}{N} \sum_x f^2(x) - \frac{1}{N} \sum_x 2\bar{f} \cdot f(x) + \frac{1}{N} \sum_x \bar{f}^2 = \\ &= \frac{1}{N} \sum_x f^2(x) - 2\bar{f} \cdot \frac{1}{N} \sum_x f(x) + \frac{1}{N} \sum_x \bar{f}^2 = \\ &= \frac{1}{N} \sum_x f^2(x) - 2\bar{f} \cdot \bar{f} + \bar{f}^2 = \\ &= \frac{1}{N} \sum_x f^2(x) - \bar{f}^2 = \end{aligned}$$

By Parseval's Theorem:

$$= \frac{1}{N} \sum_x |F(u)|^2 - F(0)$$

5. א. אילו מבין המטריצות הבאות אין יכולות להיות טרנספורם הפורייה של תמונה בעלת דרגות אפור (0.255) הסביל (מסומן בעיגול).
 F(0,0)

A $\begin{bmatrix} 0 & 18+3i & 0 \\ 10-2i & \textcircled{2} & 10+2i \\ 0 & 18-3i & 0 \end{bmatrix}$ B $\begin{bmatrix} \textcircled{15} & 4+3i & 2-2i & 1+1i \\ 2+3i & 3+2i & 0 & 0 \\ 1-3i & 0 & 1+2i & 0 \end{bmatrix}$ C $\begin{bmatrix} \textcircled{11} & 6-2i \\ 5+3i & 4+2i \\ 3+2i & 3-2i \\ 3+1i & 1+1i \\ 1+1i & 1-1i \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} 0 & 4+3i & 0 \\ 3-2i & \textcircled{10} & 3-2i \\ 0 & 4+3i & 0 \end{bmatrix}$ E $\begin{bmatrix} 3-3i & 4+3i & 1-6i \\ 3-2i & \textcircled{5+1i} & 3+2i \\ 1+6i & 4-3i & 3+3i \end{bmatrix}$ F $\begin{bmatrix} \textcircled{12} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ANSWER 5:

- A - NO
Should be: $F(0,0) \geq |F(u,v)|$
- B - NO
Is not conjugate symmetric about DC (after cyclic rotation)
- C - NO
Is not conjugate symmetric about DC (after cyclic rotation)
- D - NO
Is symmetric but not conjugate.
- E - NO
 $F(0,0)$ should be real.
- F - YES

4. א. אילו מבין המטריצות הבאות אין יכולות להיות טרנספורם הפורייה של תמונה בעלת דרגות אפור (0.255) הסביל (מסומן בעיגול).
 F(0,0)

A $\begin{bmatrix} \textcircled{21} & 4+3i & 2-2i & 1+1i \\ 2+3i & 3+2i & 0 & 0 \\ 1-3i & 0 & 0 & 1+2i \end{bmatrix}$ B $\begin{bmatrix} 0 & 22+3i & 0 \\ 10-35i & \textcircled{1} & 10+35i \\ 0 & 22-3i & 0 \end{bmatrix}$ C $\begin{bmatrix} \textcircled{100} & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

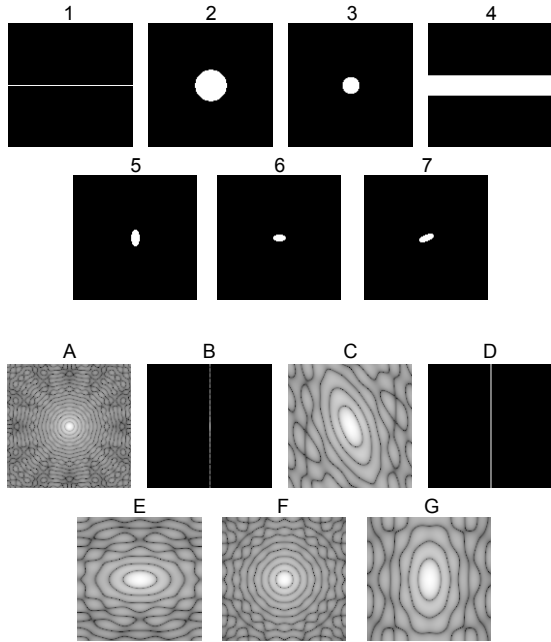
D $\begin{bmatrix} 6-2i & \textcircled{15} \\ 5+3i & 4+2i \\ 3+2i & 3-2i \\ 3+1i & 1+1i \\ 1+1i & 1-1i \end{bmatrix}$ E $\begin{bmatrix} 0 & 6+i & 0 \\ 1-2i & \textcircled{14} & 1-2i \\ 0 & 6+i & 0 \end{bmatrix}$ F $\begin{bmatrix} 7-3i & 4+3i & 1-5i \\ 3+4i & \textcircled{12+i} & 3-4i \\ 1+5i & 4-3i & 7+3i \end{bmatrix}$

ב. להלן אלגוריתם לדחיסת תמונה:

נתונה תמונה f בגודל $N \times N$. יוצרים את $N \times N$, טרנספורם הפורייה של f .
 כיון ש- F סימטרי, נוכל לזרוק $\frac{1}{2}$ מהמקדמים (תמיד נוכל לשחזרם).
 נקבל $F(N \times N)/2$ עם $(N \times N)/2$ ערכים. נחזור על התהליך: ניצור את טרנספורם הפורייה $F(N \times N)/2$ מרוק $\frac{1}{2}$ מהערכים ונקבל $F(N \times N)/4$ וכך הלאה, נקבל $F(N \times N)/8$, $F(N \times N)/16$, וכו' עד אשר נקבל $F1$ בעל מקדם אחד. $F1$ הינו הדחיסה של f . כדי לשחזר את f , מבצעים תהליך הפוך.

ברור כי פיקסל בודד (תוצאת האלגוריתם) אינו יכול לייצג את כל תוכן התמונה המקורית. אם כן, היכן הטעות באלגוריתם?

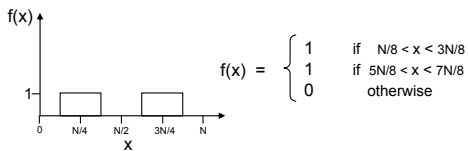
5. להלן 7 תמונות דרגות אפור 7-1 טרנספורמי פוריה (תמונות האמפליטודה). התמונות ניתנות ע"י 1-7 וטרנספורם ע"י A-G. אין סדר בין התמונות והטרנספורם. התאם כל תמונה לטרנספורם המתאים לה. על-פי תמונות הטרנספורם. נמק היטב כל התאמה: מדוע בחרת בהתאמה זו ובאיזו תכונה השתמשת.



4. נתונה התמונה f והתמונה g שהיא החזרה של f בקטור לא ידוע (a, b) . ניתן לתאר את g ע"י קונבולוציה באופן הבא:

$$g(x, y) = f(x, y) * \delta(x-a, y-b)$$
 כאשר $\delta(y)$ היא פונקציה דלתא.
 הצע שיטה הפועלת במרחב החדר, למציאת a, b . מתי אלגוריתם זה ייכשל?

1. א. מה טרנספורם הפורייה של התמונה החד מימית באורך N :



ANSWER:

1. **x** Fourier Transform of $f(x)$ is a sinc with every other entry equal 0.

Explanation:

- a) $f(x)$ can be viewed as a sum 2 functions of length N each with a single rect. The transform of rect is sinc. A translation of the rect produces a sinc with a phase shift. The sum of the two transforms produces a sinc with interference (התאבנות). Since the translation between the rects is maximal ($N/2$), the interference is at the highest frequency of $N/2$.
- b) $f(x)$ can be viewed as a concatenation of 2 images of rect of size $N/2$. This was discussed in class (example image of apples). The Transform is a scaled version of the original transform with every other pixel equal 0.
- c) $f(x)$ can be viewed as a rect convolved with a comb of frequency 2. Thus $F(u)$ is obtained by point mult between the transform of rect and the transform of the comb which is a comb of frequency $N/2$.

ב. אם טרנספורם הפורייה של $f(x)$ הוא $F(u)$, מה הטרנספורם של $f(-x)$? נמק.

א. טרנספורם הפורייה של $f(x)$ הוא $F(u)$, כך ש- $F(u) = A(u) + i B(u)$. נגדיר $G(u)$ הטרנספורם של $f(x)+f(-x)$.
 שערך את:
 $|G(u)|$ (הערך המוחלט)
 $\text{real}(G(u))$ (הערך הממשי)
 $\text{imag}(G(u))$ (הערך המדומה)
 נמק תשובותיך.

ב. טרנספורם הפורייה של $f(x)$ הוא $F(u)$, כך ש- $F(u) = A(u) + i B(u)$. נגדיר $G(u)$ הטרנספורם של $f(x) - f(-x)$.
 שערך את:
 $|G(u)|$ (הערך המוחלט)
 $\text{real}(G(u))$ (הערך הממשי)
 $\text{imag}(G(u))$ (הערך המדומה)
 צמצם ככל שניתן. נמק תשובותיך.

שאלה מספר 1

טרנספורם הפורייה של $f(x)$ הוא $F(u)$, כך ש- $F(u) = A(u) + i B(u)$

א. מה טרנספורם הפורייה של $f(-x)$ במונחים של $A(u)$ ו- $B(u)$? **צמצם ככל שניתן.**

ב. תהי $g(x) = g(-x)$ פונקציה סימטרית ז'א ($g(x) = g(-x)$).

נסמן $G(u) = C(u) + iD(u)$ שערך את: (1) $|G(u)|$ (2) $\text{real}(G(u))$ (3) $\text{imag}(G(u))$

תן תשובות במונחים של $C(u)$ ו- $D(u)$. **צמצם ככל שניתן.** נמק תשובותיך.

ג. תהי $h(x) = g(x + x_0)$ שערך את: (1) $|H(u)|$ (2) $\text{real}(H(u))$ (3) $\text{imag}(H(u))$

תן תשובות במונחים של $C(u)$ ו- $D(u)$. **צמצם ככל שניתן.** נמק תשובותיך.

ד. תהי $g_2(x) = -g_2(-x)$ פונקציה אנטי-סימטרית ז'א ($g_2(x) = -g_2(-x)$).

נסמן $G_2(u) = C_2(u) + iD_2(u)$ שערך את: (1) $|G_2(u)|$ (2) $\text{real}(G_2(u))$ (3) $\text{imag}(G_2(u))$

תן תשובות במונחים של $C_2(u)$ ו- $D_2(u)$. **צמצם ככל שניתן.** נמק תשובותיך.

ה. תהי $h_2(x) = g_2(x + x_0)$ שערך את: (1) $|H_2(u)|$ (2) $\text{real}(H_2(u))$ (3) $\text{imag}(H_2(u))$

תן תשובות במונחים של $C_2(u)$ ו- $D_2(u)$. **צמצם ככל שניתן.** נמק תשובותיך.

פתרון שאלה מספר 1

טרנספורם הפורייה של $f(x)$ הוא $F(u)$, כך ש- $F(u) = A(u) + i B(u)$

א. $f(-x) = f(-1 \cdot x) \rightarrow 1/|-1| F(-u) = F(-u)$

ב. Since $g(x) = g(-x)$ we have $G(u) = G(-u)$ thus $C(u) + iD(u) = C(u) - iD(u) \rightarrow D(u) = 0$.

- 1) $|G(u)| = |C(u)|$
- 2) $\text{real}(G(u)) = C(u)$
- 3) $\text{imag}(G(u)) = 0$

ג. $H(u) = \exp(-2\pi i u x_0) G(u) = \cos(-2\pi u x_0) C(u) + i \sin(-2\pi u x_0) C(u)$

- 1) $|H(u)| = |\exp(-2\pi i u x_0) G(u)| = |G(u)| = |C(u)|$
- 2) $\text{real}(H(u)) = \cos(-2\pi u x_0) C(u)$
- 3) $\text{imag}(H(u)) = \sin(-2\pi u x_0) C(u)$

ד. Since $g_2(x) = -g_2(-x)$ we have $G_2(u) = -G_2(-u)$ thus $C_2(u) + iD_2(u) = -C_2(u) + iD_2(u) \rightarrow C_2(u) = 0$.

- 1) $|G_2(u)| = |D_2(u)|$
- 2) $\text{real}(G_2(u)) = 0$
- 3) $\text{imag}(G_2(u)) = D_2(u)$

ה. $H_2(u) = \exp(-2\pi i u x_0) G_2(u) = \cos(-2\pi u x_0) i D_2(u) + i \sin(-2\pi u x_0) i D_2(u) = -\sin(-2\pi u x_0) D_2(u) + i \cos(-2\pi u x_0) D_2(u)$

- 1) $|H_2(u)| = |\exp(-2\pi i u x_0) G_2(u)| = |G_2(u)| = |D_2(u)|$
- 2) $\text{real}(H_2(u)) = -\sin(-2\pi u x_0) D_2(u)$
- 3) $\text{imag}(H_2(u)) = \cos(-2\pi u x_0) D_2(u)$

שאלה מספר 2

תמונת דרגות אפור חד מימדית I מוגדרת באופן הבא:

$$J_1 = \text{rand}(1, 127);$$

$$J_2 = \text{fliplr}(J_1);$$

$$I = [200, J_1 + J_2];$$

מפעילים על I את סדרת פקודות MATLAB הבאות:

$$F = \text{fft}(I);$$

$$F_2 = \text{conj}(F);$$

$$I_2 = \text{ifft}(F_2);$$

כאשר conj היא פונקציה המחזירה את הצמוד. מה יהיה I_2 ? הוכח!

פתרון שאלה מספר 2

ב. First note that I is a symmetric function/vector: $I(x) = I(N-x)$ (for $N = 127$). Remember that the first value 200, is $I(0)$.

solution 1:

The Fourier transform of a symmetric function is real (see Tip08 slide 21 or consider the fact that the transform of real images is symmetric (conjugate) thus the transform of symmetric real images is real). Thus applying the conjugate operation on the transform, leaves the transform unchanged consequently $I_2 = I$.

solution 2:

Remember that if $F(u)$ is the transform of $f(x)$ then $F(-u)$ is the transform of $f(-x)$ (see Tip08 slide 21). Since F is conjugate-symmetric, taking the conjugate is equivalent to reflecting F . Thus $F_2 = F(-u)$ and $I_2 = I(-x)$. That is I_2 is the reflection of I about 0. $I_2(x) = I(N-x)$ (for $x=0, N-1$). One must be careful since the first entry of I remains in place. The answer $I_2 = \text{fliplr}(I)$ is incorrect. The following answer is correct: $I_2 = [200 \text{ fliplr}(J_1 + J_2)]$ However $J_1 + J_2$ is symmetric thus $I_2 = I$.

Solution 3:

$$\text{conj}(F(u)) = \text{conj}\left(\sum_x I(x) e^{-2\pi i u x / N}\right) = \sum_x I(x) e^{+2\pi i u x / N}$$

$$= \sum_x I(-x) e^{-2\pi i u x / N}$$

which is the Fourier transform of $I(-x) = I(N-x)$.

שאלה מספר 3

א. האם לכל זוג תמונת דרגות אפור J, I קיימת תמונה (מסכה) כך ש:

$$I * H = J$$

$$\text{או } J * H = I$$

אם כן הוכח, אם לא תן דוגמה נגדית והסבר עבור אילו מקרים זה כן מתקיים.

פתרון שאלה מספר 3

א. From the convolution theorem the question is equivalent to the existence of $F(H)$ (the Fourier Transform of H) such that:
 $F(I) * F(H) = F(J)$ or $F(J) * F(H) = F(I)$

Thus

$$F(H) = F(J)/F(I) \quad \text{or} \quad F(H) = F(I)/F(J)$$

and $F(H)$ exists if $F(I)$ has no zeros for valued $F(J)$ entries OR $F(J)$ has no zeros for valued $F(I)$ entries. Note that if $F(J)$ and $F(I)$ have the same zero entries then H exists.