

Example Questions - Image Processing Lesson 5

- Spatial Operations
- Convolution

**Question 1:**

Prove that convolution is commutative, that is prove that:  
 $(A * B) = (B * A)$

**Answer 1**

$$A * B = \sum_i A(i)B(x-i)$$

Change of variable:  $j = x - i$   
 $i = x - j$

$$\sum_i A(x-j)B(j) = \sum_j B(j)A(x-j) = B * A$$

**Question 2:**

Prove that convolution is associative, that is prove that:  
 $(A * B) * C = A * (B * C)$

**Answer 2**

$$A * (B * C) = A * (C * B) = A * M$$

$$M(y) = \sum_j C(j)B(y-j)$$

$$A * M(x) = \sum_i A(i)M(x-i) = \sum_i A(i) \sum_j C(j)B((x-i)-j)$$

$$\sum_i \sum_j A(i)C(j)B(x-i-j) =$$

$$\sum_j \underbrace{\left( \sum_i A(i)B(x-j-i) \right)}_{(A * B)(x-j)} C(j) =$$

$$\sum_j (A * B)(x-j)C(j) =$$

$$C * (A * B) =$$

$$(A * B) * C$$

**Question 6:**

Operate on an image by performing Median Filtering in a 3x3 window. Operate on the resulting image by performing, again, Median Filtering in a 3x3 window.

Can the resulting image be obtained from a single Median filtering?

**Question 7:**

The  $\alpha$ -percentile of a set of numbers is the number in the set for which  $\alpha\%$  are larger than it. Median is the 50-percentile.

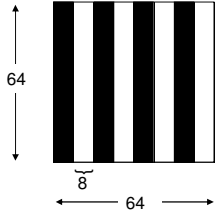
What will happen to an image if instead of Median filtering, we perform  $\alpha$ -percentile filtering

- with  $\alpha < 50$  ?
- with  $\alpha = 0$  ?

**ANS:** Image gets brighter. For  $\alpha = 0$  is equivalent to MAX operator.

**Question 8:**

Given a 64x64 image of black (0) and white (255) vertical stripes (each strip is of width 8) :



The following operations are performed on the image:

- 1) Blurring by convolution with:  $\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
- 2) Histogram Equalization.
- 3) Histogram Equalization, again.

What will the image look like after each one of the above operations if before each operation, thresholding is performed at value 128 (gray values  $[0..127] \rightarrow 0$ , gray values  $[128..255] \rightarrow 255$ ).

**Question 9:**

נתונה תמונה בגודל  $100 \times 50$ . סכום דרגות האפור בתמונה הוא 640,000. מבצעים קונבולוציה של התמונה עם המסכה A. על התוצאה מבצעים קונבולוציה עם המסכה B.

- מה יהיה סכום דרגות האפור בתמונה שתתקבל בסוף. הסבר/הוכח.
- מה יהיה סכום דרגות האפור בתמונה שתתקבל לו היינו מבצעים קונבולוציה עם המסכה B ואחר כך עם המסכה A.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

**Question 10:**

נתונה המסכה h :

$$h = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ -4 & 16 & -24 & 16 & -4 \\ 6 & -24 & 36 & -24 & 6 \\ -4 & 16 & -24 & 16 & -4 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

- מצא זוג מסכות חד ממדיות  $g_1, g_2$  כך שקונבולוציה של תמונה כלשהיא עם  $g_1$  ואח"כ עם  $g_2$  תיתן תוצאה זהה לזו שתתקבל מקונבולוציה של התמונה עם  $h$ .
- מצא 4 מסכות חד ממדיות  $I_{11}, I_{12}, I_{21}, I_{22}$  כך שקונבולוציה של תמונה כלשהיא עם  $I_{11}$  אח"כ  $I_{12}$  אח"כ  $I_{21}$  ולבסוף  $I_{22}$  תיתן תוצאה זהה לזו שתתקבל מקונבולוציה של התמונה עם  $h$ . (רמז: השתמש בסעיף א)
- מצא 2 מסכות  $k_1, k_2$  בגודל  $3 \times 3$  כך שקונבולוציה של תמונה כלשהיא עם  $k_1$  ואח"כ עם  $k_2$  תיתן תוצאה זהה לזו שתתקבל מקונבולוציה עם  $h$ .

**Question 11:**

נתונה תמונה בגודל  $25 \times 25$ . מבצעים קונבולוציה של התמונה עם המסכה h פעם 1999.

$$h = \begin{bmatrix} 0 & 0.15 & 0 \\ 0.15 & 0.4 & 0.15 \\ 0 & 0.15 & 0 \end{bmatrix}$$

בסוף תהליך הקונבולוציה מבצעים floor על כל פיקסל (  $\text{floor}(P) = \text{המספר השלם הגדול ביותר הקטן או שווה ל-} P$  ).

- כיצד תראה תוצאת הקונבולוציה כאשר:

  - הקונבולוציה מתבצעת עם אפסים מחוץ לתמונה.
  - כאשר הקונבולוציה מתבצעת באופן ציקלי.

**Question 12:**

נתונות המסכות הבאות:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 12 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

דרג אותן לפי מידת ה"נזק" שהן גורמות לתמונה במידה ונבצע איתן קונבולוציה. מידת ה"נזק" נמדדת ע"פ מידת הקושי לשחזר את התמונה המקורית. הנח קונבולוציה עם ריפוד אפסים. הסבר מיקומו של כל מסכה בדירוג.

**2. א. נתונות שתי סדריות חד מימדיות:**

$$A = [0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 0 \ 0] \quad B = [0 \ 0 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 0 \ 0]$$

כ"כ נתונות תוצאות הקונבולוציות הבאות עם מסכה C לא ידועה (הנח ריפוד באפסים):

$$A * C = [0 \ 2 \ 3 \ 7 \ 11 \ 15 \ 7 \ 15 \ 0] \quad B * C = [0 \ 4 \ 4 \ 11 \ 15 \ 19 \ 9 \ 18 \ 0]$$

מה תהייה תוצאת הקונבולוציות הבאות. נמק ללא שחזור C.

$$I. [0 \ 0 \ 4 \ 7 \ 10 \ 13 \ 16 \ 0 \ 0] * C$$

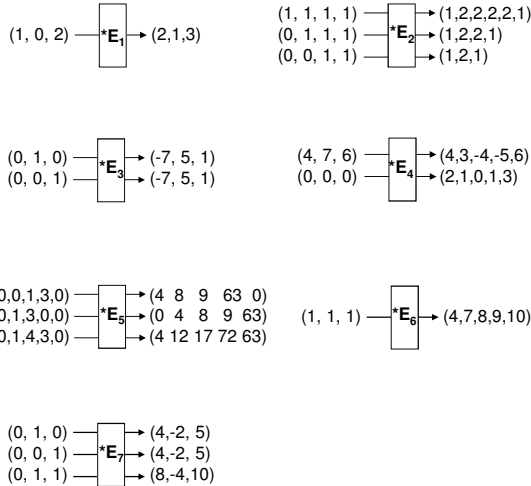
$$II. [0 \ 0 \ 2 \ 4 \ 6 \ 8 \ 10 \ 0 \ 0] * C$$

$$III. [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 0] * C$$

IV. מהו סכום הערכים שבמסכה C. נמק.

- תהי D מסכה לא ידועה בגודל  $2 \times 2$ . תכן סדרה של קלטים (תמונות בגודל כלשהוא) כך שמתוך תוצאות הקונבולוציה שלהן עם מסכה D ניתן לקבוע את ערכי D. (הנח ריפוד באפסים או ריפוד ציקלי - לבחירתך). הסבר.

ג. בכל אחד מהמקרים הבאים, קבע האם קיימת מסכה E? נמק תשובותך על סמך תכונות הקונבולוציה (ללא שחזור E). הנח ריפוד הקלט באפסים. תוצאות הקונבולוציה אינן מקוצצות לגודל התמונה המקורית אך אפסים בקצוות מקוצצים. תוצאות ניתנות עד כדי הזזה (ז"א הראשית איננה מסומנת בתוצאה).



E1: **NOT possible**. Since the output is the same size as input, the mask must be of length 1 (I.e. is single constant). However there is no constant that multiplies the input to produce the output.

E2: **NOT possible**. Several explanations: a) the sum of pixel ratio between input and output are not constant (input 2,3 the ratio is 2 whereas for input 1 the ratio is 2.5). B) The length of the output increases by 2 for input 1 (implying a mask of length 3) and increases by 1 for inputs 2,3 (implying mask of length 2).

E3: **IS possible**.  $E3=[1,5,-7]$ . The outputs are shifted. Since the zeros have been erased and the origin have not been marked, it is possible that the 2 outputs are shifted.

E4: **NOT possible**. Convolution with a 0 input produces a 0 output regardless of mask.

E5: **IS possible**: The left shift in input 2 looks like produced a right shift, however due to deleted zeros and unmarked origin, it is possible that the output is indeed left shifted. Also, additivity is preserved.

E6: **NOT possible**. There is no such mask. The output is increasing values and this is impossible for the input. Values must decrease from a certain point in output.

E7: **NOT possible**. Shift invariance IS preserved (again because the zeros are deleted). Additivity is not preserved since input 3 is the sum of inputs 1 and 2 but the output of 3 is the sum of outputs 1 and 2 WITHOUT the shift. Also: Output 3 is double output 1, however input 3 is NOT double input 1, which contradicts linearity.

**NOTES:** Masks can be of size 1 or larger. The values in a mask are not necessarily whole or integers (I.e. they may be fractions). The fact that ratios between input and output are preserved is NOT enough to prove the existence of a mask.

### שאלה מספר 3

אילו מהפעולות הבאות ניתן לבצע ע"י קונבולוציה. הסבר או תן מסכה מתאימה. הנח קונבולוציה ציקלית או עם ריפוד של אפסים – לבחירתכם. אל תדאגו לבריחת דרגות האפור אל מחוץ לתחום 0...255.

1. שטטוש
2. שינוי קונטרסט ללא שינוי הממוצע
3. שינוי הממוצע ללא שינוי הקונטרסט
4. שכפול תמונה
5. שינוי היסטוגרמה
6. לקיחת סף
7. הזזת תמונה
8. נגיב של תמונה
9. הגדלת תמונה
10. סיבוב תמונה
11. החלפת כל פיקסל בממוצע השכנים של הפיקסל שמימינו (ללא הפיקסל שמימינו)

### תשובה לשאלה מספר 3

אילו מהפעולות הבאות ניתן לבצע ע"י קונבולוציה. הסבר או תן מסכה מתאימה. הנח קונבולוציה ציקלית או עם ריפוד של אפסים – לבחירתכם. אל תדאגו לבריחת דרגות האפור אל מחוץ לתחום 0...255.

1. שטטוש - כן, למשל:
 

1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9
2. שינוי קונטרסט ללא שינוי הממוצע - כן, לדוגמה בסעיף 1 לא משנה את הממוצע אך כן את הקונטרסט (ברוב המקרים).
3. שינוי הממוצע ללא שינוי הקונטרסט – לא ניתן כי יש צורך להוסיף/להפחית ערך קבוע מכל פיקסל וזה לא ניתן לביצוע ע"י קונבולוציה.
4. שכפול תמונה - כן, למשל ע"י:
 

1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0

5. שינוי היסטוגרמה – לא, אין זה תהליך ליניארי.
6. לקיחת סף – כ"ל
7. הזזת תמונה - כן, למשל
 

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0
8. נגיב של תמונה – כן, ע"י קונבולוציה עם: 1 - (של, אין צורך לדאוג דרגות אפור 0...255)
9. הגדלת תמונה – לא ניתן, כיון שמה שמתבצע בכל פיקסל תלוי במיקומו (קואורדינטות של הפיקסל) וקונבולוציה פועלת באופן הומוגני.
10. סיבוב תמונה – לא, כ"ל
11. החלפת כל פיקסל בממוצע השכנים של הפיקסל שמימינו (ללא הפיקסל שמימינו) – כן:
 

1	1	1
1	0	1
1	1	1

### שאלה מספר 1 (2004-5)

אילו מהפעולות הבאות ניתן לבצע ע"י קונבולוציה. הסבר או תן מסכה מתאימה. הנח קונבולוציה ציקלית או עם ריפוד של אפסים – לבחירתכם. אל תדאגו לבריחת דרגות האפור אל מחוץ לתחום 0...255. אין להתייחס למסכות טריביליות (שכל ערכיהם 0) כתשובה.

1. הגדלת הממוצע לערך k נתון
2. הגדלת הקונטרסט פי 2
3. IDEAL High Pass Filtering
4. Homomorphic Filtering
5. העתקת תמונה 3 פעמים
6. החלפת כל פיקסל בפיקסל הנמצא 4 מקומות ימינה 2-למטה.
7. שיקוף התמונה (לא משנה מיקום הציר)
8. החלפת כל פיקסלי התמונה לערך קבוע
9. איפוס הפיקסל אשר מוקף (שכנות-8) בפיקסלים בהירים ממנו פי שניים
10. Bilateral Filtering
11. נגזרת בציר ה-x ועוד נגזרת בציר ה-y

### תשובה לשאלה מספר 1 (2004-5)

1. No – if avg gray level of image is not known.  
Yes – if avg gray level of image is known: In this case if image avg is M then a mask which changes avg of image to k would be for example a 1x1 mask with value k/M.  
Both answers were accepted.
2. Yes – Use a 1x1 mask with value 2. This mask multiplies all gray values by 2. Thus the max and min gray values are multiplied by two and so is their difference.
3. Yes – Any filtering in the Fourier domain can be implemented using convolution in the spatial domain – The convolution theorem.  
(If H is the high-pass filter then  $\mathcal{F}^{-1}\{H\}$  is the appropriate convolution mask).
4. No – Homomorphic Filtering requires taking the log of image values. Log is a non-linear operation and can not be performed using convolution.
5. Yes – Using a mask composed of 3 delta functions:  
e.g.  $\delta(x-x_0, y-y_0) + \delta(x-x_1, y-y_1) + \delta(x-x_2, y-y_2)$
6. Yes – using the following Mask:  

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{origin}$$
  
(Do not forget that the mask is flipped when used in convolution).
7. No – Reflection changes pixel values dependent on the coordinates. Convolution does not take into account coordinates.
8. Yes – Using a mask of ones the size of the image (or multiples thereof) and assuming cyclic convolution, creates an image with constant values (equal to the sum of image pixels).

9. No – Determining that ALL surrounding pixels are EXACTLY twice the value of the center pixel, requires an 'if' operation. This can not be done using convolution.  
Yes – The following mask DOES zero out pixels with surrounding pixels double in value. (It also zeros out many other configurations – but this was not specifically stated in question).  
Both answers were accepted.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -16 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

10. No – Bilateral Filtering sets values according to distance of neighboring pixels which CAN be done using convolution, but also a weighting on the difference between gray values of the neighbors and current pixel – this CAN NOT be done using convolution.

11. Yes – the masks for d/dx and d/dy are:

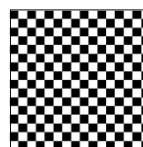
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

and the mask for d/dx + d/dy is (by additivity/distributivity of convolution):

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

### שאלה מספר 3 (2004-5)

תהי תמונת טקסטורה בגודל 256 x 256 עם הטקסטורה הבאה:  
(0 = שחור, 1 = לבן).



נגדיר קבוצת מסכות:  $M_\lambda = \{ m : |m| = \lambda \text{ and } m \text{ is of size } 5 \times 5 \}$   
כלומר זוהי קבוצת מסכות בגודל 5x5 שאם נבצע קונבולוציה בינן לבין התמונה, נקבל את התמונה כפול  $\lambda$  (סקלר כלשהוא).

- א. כמה איברים בקבוצה  $M_2$ ? הסבר.
- ב. מה סכום הפיקסלים של איבר ב-  $M_\lambda$ ? הסבר.
- ג. מצאו 3 דוגמאות של איברים מ-  $M_\lambda$ , כשכל דוגמה בעלת נורמה שונה עבור  $\lambda=13$ . (נורמה של מטריצה מוגדרת כסכום ריבועי האיברים במטריצה).



### פתרון שאלה מספר 1

- I. No.  
 Example: consider the following image with values 0,1:  

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$
- Average filtering (say  $1 \times 3$  uniform mask) will produce non whole numbers (between 0 and 1) and the following median filtering will be a non whole number.  
 Median filtering the image (say with a  $1 \times 3$  window) will produce an all 1 image and following with the average filtering will maintain 1.
- II. Yes,  
 Proof:  
 Assume masks are of size  $k \times 1$  and  $1 \times k$ , with origin at first pixel.  
 For any given pixel  $(x_0, y_0)$ , the region of influence is a square  $k \times k$  window starting at the pixel. Assume that the maximum value within this window is  $p_1$  located at coordinates  $(x_1, y_1)$ .
- Max on rows will set coordinate  $(x_0, y_1)$  to value  $p_1$ .  
 Max on cols will cause coordinate  $(x_0, y_0)$  to get value  $p_1$ .
- Max on cols will set coordinate  $(x_1, y_0)$  to value  $p_1$ .  
 Max on rows will set coordinate  $(x_0, y_0)$  to value  $p_1$ .
- III. No.  
 Example: Consider a  $1 \times 2$  and  $2 \times 1$  sized masks. For any given pixel  $(x_0, y_0)$  the region of influence is a  $2 \times 2$  window. Consider the following window:
- |   |   |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |
- Max on rows followed by Min on cols will set coordinate  $(x_0, y_0)$  to 1.  
 Min on rows followed by Max on cols will set coordinate  $(x_0, y_0)$  to 0.

- IV. No.  
 Example: Consider a  $2 \times 2$  and  $2 \times 2$  sized masks. For any given pixel  $(x_0, y_0)$  the region of influence is a  $3 \times 3$  window. Consider the following window:
- |   |   |   |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
- Max followed by Min will set coordinate  $(x_0, y_0)$  to 1.  
 Min followed by Max will set coordinate  $(x_0, y_0)$  to 0.
- V. No.  
 Example: Consider a  $3 \times 1$  and  $1 \times 3$  sized masks. For any given pixel  $(x_0, y_0)$  the region of influence is a  $3 \times 3$  window. Consider the following window:
- |   |   |   |
|---|---|---|
| 2 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | 2 |
- Median on rows followed by Median on cols will set coordinate  $(x_0, y_0)$  to 1.  
 Median on cols followed by Median on rows will set coordinate  $(x_0, y_0)$  to 2.
- VI. Yes.  
 Proof: Both low and high pass can be implemented using convolution and convolution is commutative.  
 Note: there is no restriction on the frequency bands in the low and high pass filtering so that frequency bands may or may not overlap.

### שאלה מספר 1

נתונה תמונה חד מימדית  $I$  ומסכה חד מימדית  $H$ .  
 האם ניתן לבצע קונבולוציה  $I * H$  ע"י כפל מטריצות?  
 אם כן תאר את מטריצות ההכפלה, אם לאו הסבר!  
 א. עבור קונבולוציה בריפוד אפסים.  
 ב. עבור קונבולוציה ציקלית.

$$\boxed{I} * \boxed{H}$$

### שאלה מספר 2

נתונה תמונה חד מימדית  $I$  מחזורית (מספר שלם של מחזורים) ומסכה חד מימדית  $H$ .  
 האם תוצאת הקונבולוציה  $I * H$  גם כן מחזורית?  
 הוכח!

$$\boxed{I} * \boxed{H} = ?$$