העמדה מקומית

- $\mathrm{LA}(A, B)$:

$$\max\left\{\mathrm{score}(\mathrm{A}', \mathrm{B}') : A, B \text{ תת-מחרוזות של } A', B'\right\}$$

העמדה מקומית

- $\mathrm{LA}(A, B)$:

$$\max \left\{ \mathrm{score}(\mathrm{A}', \mathrm{B}') : A, B \text{ של } \text{תת-מחרוזות } A', B' \right\}$$

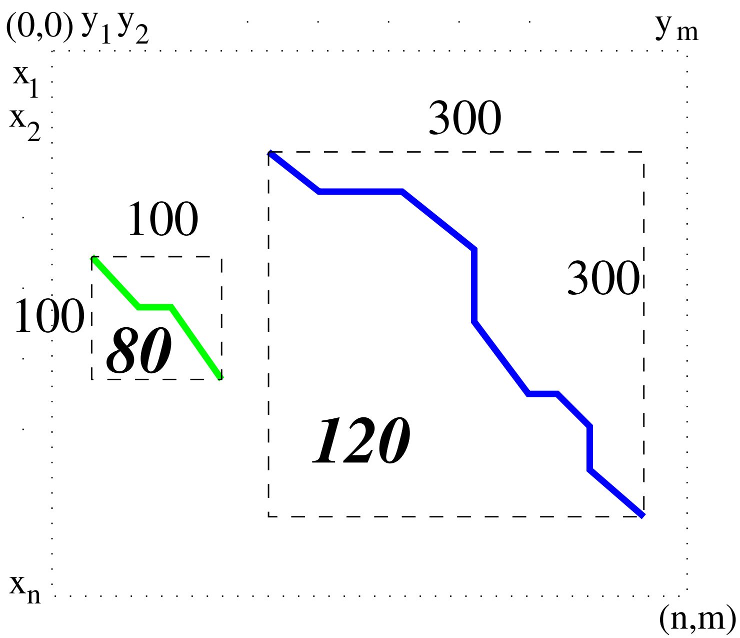
ניקוד:

- 1 לכל match
- $-\delta$ לכל mismatch
- $-\mu$ לכל indel

העמדה מקומית

- $\mathrm{LA}(A,B)$:

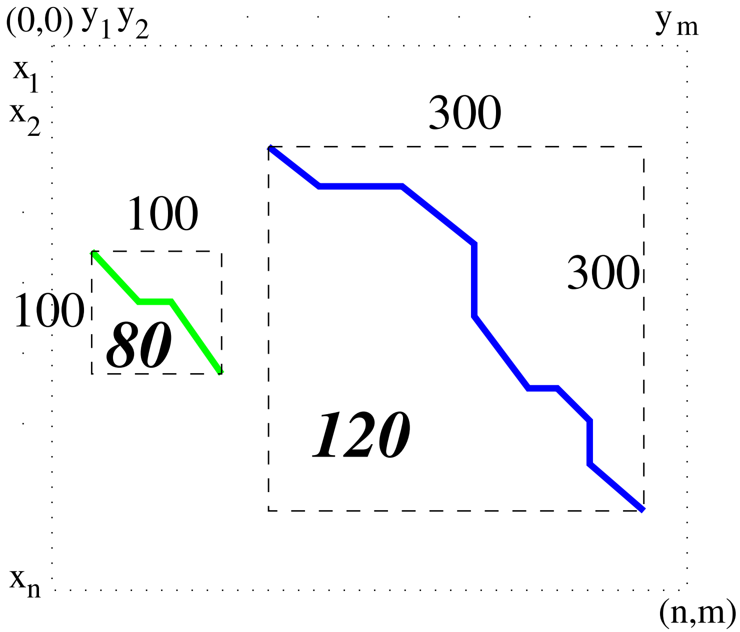
$\max\left\{\mathrm{score}(\mathrm{A}',\mathrm{B}') : A,B$ של תת-מחרוזות $A',B'\right\}$

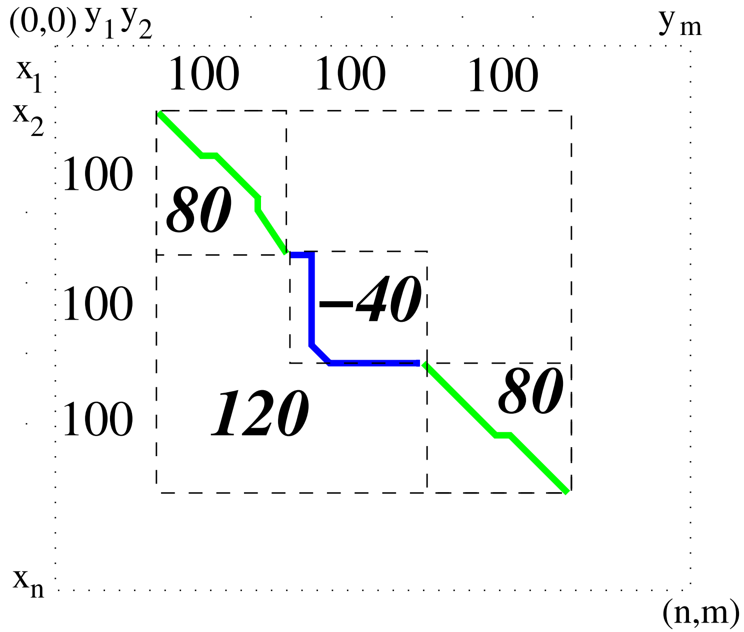


העמדה מקומית

- $\mathrm{LA}(A,B)$:

$$\max\left\{\mathrm{score}(\mathrm{A}',\mathrm{B}') : A,B \text{ של תת-מחרוזות } A',B'\right\}$$





העמדה מקומית מנורמלת

- $\mathrm{LA}(A,B)$:

$$\max\left\{\mathrm{score}(\mathrm{A}',\mathrm{B}') : A,B \text{ תת-מחרוזות של } A',B'\right\}$$

- $\mathrm{NLA}(A,B)$:

$$\max\left\{\frac{\mathrm{score}(\mathrm{A}',\mathrm{B}')}{|A'|+|B'|+L} : A,B \text{ תת-מחרוזות של } A',B'\right\}$$

ניסוח חלופי

- :$\mathrm{LA}(A,B)$

$$\max\{x-\delta y-\mu z:(x,y,z)\in AV(A,B)\}$$

כאשר $x=$ מספר ה-matches,

$y=$ מספר ה-mismatches, $z=$ מספר ה-indels

ניסוח חלופי

- $\mathrm{LA}(A, B)$:

$$\max\left\{x - \delta y - \mu z : (x, y, z) \in AV(A, B)\right\}$$

כאשר $x =$ מספר ה-matches,
$y =$ מספר ה-mismatches, $z =$ מספר ה-indels

דוגמה:

```
abc
ac
```

ניסוח חלופי

- $\mathrm{LA}(A,B)$:

$$\max\{x-\delta y-\mu z:(x,y,z)\in AV(A,B)\}$$

כאשר $x=$ מספר ה-matches,

$y=$ מספר ה-mismatches, $z=$ מספר ה-indels

דוגמה:

```
abc
ac-
```

$AV(A,B)=$

$\{(1,1,1),$

ניסוח חלופי

- :LA(A, B)

$$\max\{x - \delta y - \mu z : (x, y, z) \in AV(A, B)\}$$

כאשר $x =$ מספר ה-matches,

$y =$ מספר ה-mismatches, $z =$ מספר ה-indels

דוגמה:

$AV(A, B) =$

$\{(1, 1, 1), (2, 0, 1),$

```
abc
a-c
```

ניסוח חלופי

- $\mathrm{LA}(A,B)$:

$$\max\left\{x-\delta y-\mu z : (x,y,z)\in AV(A,B)\right\}$$

כאשר $x=$ מספר ה-matches,
$y=$ מספר ה-mismatches, $z=$ מספר ה-indels

דוגמה:

$$AV(A,B) =$$
$$\{(1,1,1),(2,0,1),$$

```
abc
-ac
```

ניסוח חלופי

- :$\mathrm{LA}(A,B)$

$$\max\left\{x-\delta y-\mu z:(x,y,z)\in AV(A,B)\right\}$$

כאשר $x=$ מספר ה-matches,
$y=$ מספר ה-mismatches, $z=$ מספר ה-indels

דוגמה:

$AV(A,B) =$
$\{(1,1,1),(2,0,1),(1,0,3),$

```
a-bc
-a-c
```

ניסוח חלופי

- :LA(A,B)

$$\max\left\{x-\delta y-\mu z : (x,y,z)\in AV(A,B)\right\}$$

כאשר $x =$ מספר ה-matches,
$y =$ מספר ה-mismatches, $z =$ מספר ה-indels

דוגמה:

```
ab
a-
```

$$AV(A,B) = \{(1,1,1),(2,0,1),(1,0,3),(1,0,1),\ldots$$

ניסוח חלופי

- $\mathrm{LA}(A,B)$:

$$\max\left\{x-\delta y-\mu z : (x,y,z)\in AV(A,B)\right\}$$

כאשר $x=$ מספר ה-matches,
$y=$ מספר ה-mismatches, $z=$ מספר ה-indels

- $\mathrm{NLA}(A,B)$:

$$\max\left\{\frac{x-\delta y-\mu z}{2x+2y+z+L} : (x,y,z)\in AV(A,B)\right\}$$

מציאת מקסימום של מנה

$$\mathrm{OPT} = \max\left\{\frac{f(x)}{g(x)} : x \in C\right\}$$

כאשר C קבוצה כלשהי של איברים. למשל, C יכולה להיות קבוצה של וקטורים

מציאת מקסימום של מנה

$$\mathrm{OPT} = \max\left\{\frac{f(x)}{g(x)} : x \in C\right\}$$

הנחות:

1. $g(x) > 0$ לכל x
2. $\mathrm{OPT} \in [a, b]$
3. $\min\left(\left\{\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(y)}\right| : x, y \in C\right\} \setminus \{0\}\right) = \sigma > 0$
4. ניתן לחשב ביעילות את

$$\mathrm{OPT}(\lambda) = \max\{f(x) - \lambda g(x) : x \in C\}$$

שימוש בבעיה הפרמטרית

$$A: \qquad \mathrm{OPT} = \max\left\{\frac{f(x)}{g(x)} : x \in C\right\}$$

$$B_\lambda: \qquad \mathrm{OPT}(\lambda) = \max\left\{f(x) - \lambda g(x) : x \in C\right\}$$

טענה:

$$\mathrm{OPT}(\lambda) < 0 \iff \lambda > \mathrm{OPT}$$

$$\mathrm{OPT}(\lambda) = 0 \iff \lambda = \mathrm{OPT}$$

$$\mathrm{OPT}(\lambda) > 0 \iff \lambda < \mathrm{OPT}$$

הוכחת הטענה

$$\mathrm{OPT}(\lambda) = \max\left\{ f(x) - \lambda g(x) : x \in C \right\}$$

הוכחת הטענה

$$\begin{aligned}\mathrm{OPT}(\lambda) &= \max\left\{f(x) - \lambda g(x) : x \in C\right\} \\ &= \max\left\{g(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)} - \lambda\right) : x \in C\right\}\end{aligned}$$

הוכחת הטענה

$$\mathrm{OPT}(\lambda) = \max\left\{ g(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)} - \lambda\right) : x \in C \right\}$$

הוכחת הטענה

$$\mathrm{OPT}(\lambda) = \max\left\{ g(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)} - \lambda\right) : x \in C \right\}$$

- $\lambda > \mathrm{OPT}$.
  לכל x, $0 > \mathrm{OPT} - \lambda \geq \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda$ ולכן $\mathrm{OPT}(\lambda) < 0$

הוכחת הטענה

$$\mathrm{OPT}(\lambda) = \max\left\{ g(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)} - \lambda\right) : x \in C \right\}$$

- $\lambda > \mathrm{OPT}$.

לכל x, $\frac{f(x)}{g(x)} - \lambda \geq \mathrm{OPT} - \lambda < 0$ ולכן $\mathrm{OPT}(\lambda) < 0$

- $\lambda < \mathrm{OPT}$.

יהא $x^* \in C$ כך ש $\mathrm{OPT} = \frac{f(x^*)}{g(x^*)}$

$\frac{f(x^*)}{g(x^*)} - \lambda = \mathrm{OPT} - \lambda > 0$ ולכן $\mathrm{OPT}(\lambda) > 0$

הוכחת הטענה

$$\mathrm{OPT}(\lambda) = \max\left\{ g(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)} - \lambda\right) : x \in C \right\}$$

- $\lambda = \mathrm{OPT}$.

  אזי $\lambda - \frac{f(x^*)}{g(x^*)} = 0$

  לכל x אחר, $\lambda - \frac{f(x)}{g(x)} \geq \mathrm{OPT} - \lambda \geq 0$

  לכן $\mathrm{OPT}(\lambda) = 0$

מסקנה

- אם $\lambda = \mathrm{OPT}$ אז פתרון אופטימלי ל-B_λ הוא פתרון אופטימלי ל-A
- אם $\lambda < \mathrm{OPT}$ ו-x פתרון אופטימלי ל-B_λ אז $\frac{f(x)}{g(x)} > \lambda$

אלגוריתם לפתרון A

1. $[a,b] \to [c,d]$
2. כל עוד $\sigma \geq d - c$ בצע:

(א) $\lambda \to \frac{c+d}{2}$, וחשב $\mathrm{OPT}(\lambda)$

(ב) אם $\mathrm{OPT}(\lambda) = 0$, מצא פתרון אופטימלי ל-$B_\lambda$ ועצור

(ג) אם $\mathrm{OPT}(\lambda) < 0$ הצב $d \to \lambda$ ואחרת $c \to \lambda$

3. מצא פתרון אופטימלי ל-B_c

אלגוריתם לפתרון A

1. $[a,b] \rightarrow [c,d]$
2. כל עוד $\sigma \geq d - c$ בצע:

(א) $\lambda \rightarrow \frac{c+d}{2}$, וחשב $\mathrm{OPT}(\lambda)$

(ב) אם $\mathrm{OPT}(\lambda) = 0$, מצא פתרון אופטימלי ל-$B_\lambda$ ועצור

(ג) אם $\mathrm{OPT}(\lambda) < 0$ הצב $\lambda \rightarrow d$ ואחרת $\lambda \rightarrow c$

3. מצא פתרון אופטימלי ל-B_c

מספר איטרציות: $\log_2 \frac{b-a}{\sigma}$

פתרון הבעיה הפרמטרית

$$\max\left\{x - \delta y - \mu z - \lambda(2x + 2y + z + L)\right.$$
$$\left. : (x, y, z) \in AV(A, B)\right\}$$

פתרון הבעיה הפרמטרית

$$\max\Big\{x - \delta y - \mu z - \lambda(2x + 2y + z + L)$$
$$: (x, y, z) \in AV(A, B)\Big\}$$

$$= \max\Big\{(1 - 2\lambda)x - (\delta + 2\lambda)y - (\mu + \lambda)z$$
$$: (x, y, z) \in AV(A, B)\Big\} - \lambda L$$

חסם על σ

נניח כי $\mu = \frac{r}{s}$, ו-$\delta = \frac{p}{q}$ הם רציונליים.

חסם על σ

נניח כי $\mu = \frac{r}{s}$, ו-$\delta = \frac{p}{q}$ הם רציונליים.

טענה: לכל a, b, c, d טבעיים, $\frac{c}{d} > \frac{a}{b} \Longleftarrow \frac{1}{bd} \geq \frac{a}{b} - \frac{c}{d}$

חסם על σ

נניח כי $\mu = \frac{r}{s}$, ו-$\delta = \frac{p}{q}$ הם רציונליים.

טענה: לכל a, b, c, d טבעיים, $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \geq \frac{1}{bd}$

לכל $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in AV(A, B)$,

$$\frac{x_1 - \delta y_1 - \mu z_1}{2x_1 + 2y_1 + z_1 + L} - \frac{x_2 - \delta y_2 - \mu z_2}{2x_2 + 2y_2 + z_2 + L}$$

חסם על σ

נניח כי $\mu = \frac{r}{s}$, ו-$\delta = \frac{p}{q}$ הם רציונליים.

טענה: לכל a, b, c, d טבעיים, $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Longleftarrow \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \geq \frac{1}{bd}$

לכל $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in AV(A, B)$,

$$\frac{x_1 - \delta y_1 - \mu z_1}{2x_1 + 2y_1 + z_1 + L} - \frac{x_2 - \delta y_2 - \mu z_2}{2x_2 + 2y_2 + z_2 + L}$$

$$= \frac{1}{qs}\left(\frac{qsx_1 - psy_1 - qrz_1}{2x_1 + 2y_1 + z_1 + L} - \frac{qsx_2 - psy_2 - qrz_2}{2x_2 + 2y_2 + z_2 + L}\right)$$

חסם על σ

נניח כי $\mu = \frac{r}{s}$, ו-$\delta = \frac{p}{q}$ הם רציונליים.

טענה: לכל a, b, c, d טבעיים, $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Longleftarrow \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \geq \frac{1}{bd}$

לכל $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in AV(A, B)$,

$$\frac{x_1 - \delta y_1 - \mu z_1}{2x_1 + 2y_1 + z_1 + L} - \frac{x_2 - \delta y_2 - \mu z_2}{2x_2 + 2y_2 + z_2 + L}$$

$$= \frac{1}{qs}\left(\frac{qsx_1 - psy_1 - qrz_1}{2x_1 + 2y_1 + z_1 + L} - \frac{qsx_2 - psy_2 - qrz_2}{2x_2 + 2y_2 + z_2 + L}\right)$$

$$\geq \frac{1}{qs} \cdot \frac{1}{(2x_1 + 2y_1 + z_1 + L)(2x_2 + 2y_2 + z_2 + L)}$$

חסם על σ

נניח כי $\mu = \frac{r}{s}$, ו-$\delta = \frac{p}{q}$ הם רציונליים.

טענה: לכל a, b, c, d טבעיים, $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} \geq \frac{1}{bd} \Longleftarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

לכל $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in AV(A, B)$,

$$\frac{x_1 - \delta y_1 - \mu z_1}{2x_1 + 2y_1 + z_1 + L} - \frac{x_2 - \delta y_2 - \mu z_2}{2x_2 + 2y_2 + z_2 + L}$$

$$= \frac{1}{qs}\left(\frac{qsx_1 - psy_1 - qrz_1}{2x_1 + 2y_1 + z_1 + L} - \frac{qsx_2 - psy_2 - qrz_2}{2x_2 + 2y_2 + z_2 + L}\right)$$

$$\geq \frac{1}{qs} \cdot \frac{1}{(2x_1 + 2y_1 + z_1 + L)(2x_2 + 2y_2 + z_2 + L)}$$

$$\geq \frac{1}{qs(m + n + L)^2} = \Omega\left(\frac{1}{n^2}\right)$$